

カラマツの幹の形を数式で表現する

山田健四

はじめに

樹木は、葉で生産した光合成産物を樹体の様々な部位に配分しながら成長し、樹体を大きくしていきます。樹木の幹は根元の近くでは太く、梢端に近づくにつれて細くなっていきますが、幹の縦断面は単純な三角形ではなく、複雑な曲線を描いています。樹木を木材として利用する場合、丸太から直線的に木材を切り出すには、梢端に近い細い切り口、すなわち末口のサイズが利用上の上限となります。したがって、木材をなるべく無駄なく使うためには、丸太を切り出す際にどの長さにとすると末口径が何 cm になるか、というように、幹の形を把握しておくことが重要になります。このとき、様々な樹高や太さの樹木の幹の形を数式で統一的に表現することができれば、任意の位置での幹の直径を推定することが可能となり、木材を効率的に利用できるほか、幹断面の回転体の体積を求めることで材積の計算も可能となります。

そこで本稿では、資源の大径化が進む北海道のカラマツを取り上げ、幹の形の数式による表現について紹介します。

幹の形を「相対化」する

幹の形を数式で表現する、といっても、個体ごとに樹高も違えば太さも違い、数式で示すのは簡単そうではありません。しかし、大きな木も小さな木も、根元が太く先端は細いという共通点があり、比率を保ったまま拡大縮小すれば同じような形に揃えることができそうです。そこで、樹高や太さが個体ごとに異なる幹の形を統一的に数式として扱うために、樹高や直径を揃える「相対化」を行います(図-1)。樹高については、樹木の任意の高さをその木の樹高で割り返すことにより、0~1の値を取る「相対樹高」として表すことができます。

一方、直径はどの位置で測定したものを基準とすればいいでしょうか。一番太い地際径は測定するのも大変ですし、根張りの形は個体差が大きいので、基準にするにはあまりふさわしくありません。胸高

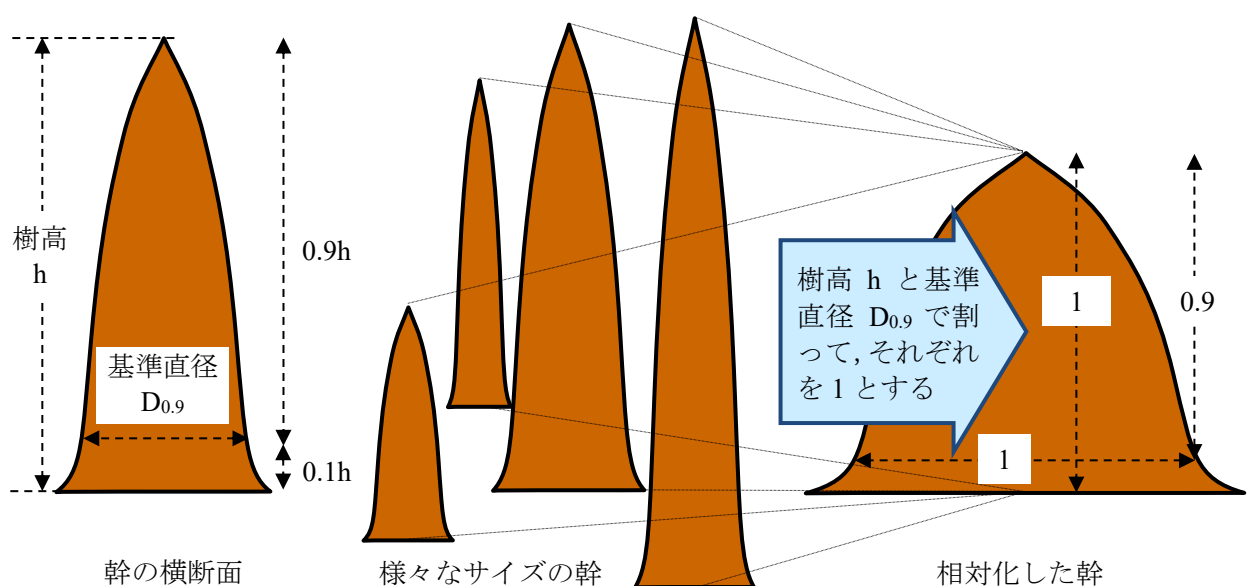


図-1 幹の形状の相対化の考え方

直径（DBH）は林業で標準的に用いられる直径ですが、同じ1.3mの高さで樹高10mの木と30mの木の直径を測ると、拡大縮小して大きさを揃えたときには測定位置が大きすぎてしまうため、相対化の基準としては少し問題があります。このため、幹の形を相対化する場合は、樹高を1として上から測ったときに0.9となる位置、すなわち地際から樹高の1割の高さで測った直径（ $D_{0.9}$ ）を基準とし、任意の高さの直径を $D_{0.9}$ で割り返した値を「相対直径」とします。

カラマツの幹を数式で表す

全道各地で630本のカラマツを伐倒し、高さごとに直径を測定した4,562点のデータについて、前述した方法で相対化した相対樹高と相対直径の関係を図-2に示します。なお、この図では横軸が相対樹高なので、木の形を横倒しに見ており、相対樹高は直径が0となる頂端を0とするため、頂端からの距離を樹高で割った値を用いています。相対樹高は1を超えることはありませんが、相対直径は基準直径である相対樹高0.9で1となり、それより地際に近い部分では1より大きな値を取ります。相対化することで大まかには似たような形になりますが、木によって形状がばらついていることが分かります。また、基準とした相対樹高0.9の位置ではすべての木の直径が1の点を通りますが、地際付近は再びばらつきが大きくなっている様子が見られます。

こうして相対化した樹高と直径の関係を数学的に記述した数式を「相対幹曲線式」と呼びます。相対幹曲線式の作成は世界の様々な樹種で試みられ、数式としては多項式やべき乗式、逆数式などが用いられています。日本ではこれまで多項式がよく用いられており、特に根元付近の広がりや梢端付近の先細りを2つの変曲点で表現できる3次式（ $y = ax^3 + bx^2 + cx$ で表され、 a 、 b 、 c はそれぞれパラメータ）は、スギなどの針葉樹の幹の形を表す曲線として広く利用されています。図-2で見られた形状のばらつきを説明するために、3次式のパラメータが樹高と直径の影響を受けて変化することを組み込んだ曲線式としました。また、地際付近では「根張り」の影響によりばらつきが大きくなっていると考えられることから、すべてのデータを使った場合に加え、根張りの影響を除くために測定高1.3m以上の測定データのみを使った場合の2通りで統計処理を行いました。その結果、樹高1.3m以上の測定データのみを使った赤い線では、全体的に幹の形をよく再現できていたことから、これを最適な曲線式としました（図-3）。

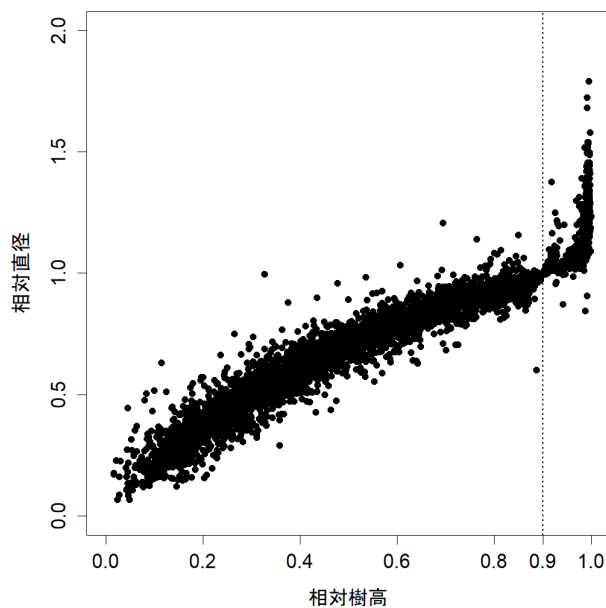


図-2 相対化したカラマツの樹高と直径の関係

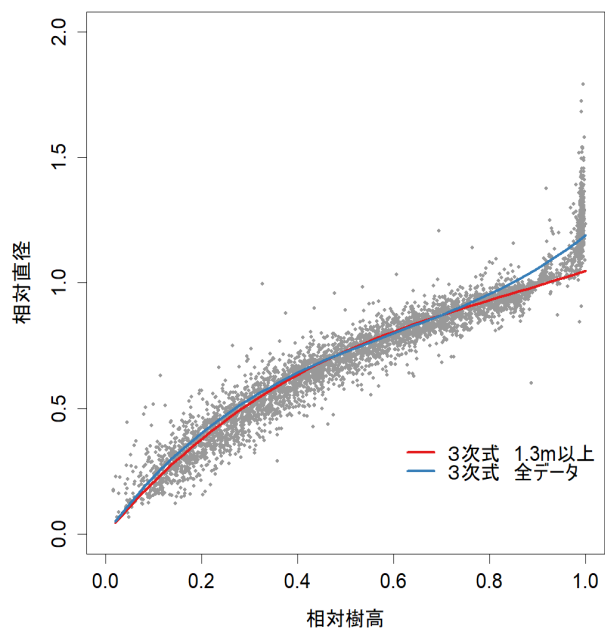


図-3 カラマツの幹の形状の近似曲線

相対幹曲線式でできること その1 細りの計算

幹の形状を数式で表すことができると、樹高と胸高直径を元に、その木の任意の高さの直径が分かるようになります。これを利用したのが、「細り表」です(図-4)。細り表を使うことで、立木を伐採して丸太にしたときの採材長をもとに材の末口径を把握でき、木材の用途を考える重要な判断材料を提供できます。

細り表については、山田(2011)で詳しく紹介していますので、興味のある方はご参照ください。なお、細り表については前報で紹介した後に数式を修正し、現在は【改訂第2版】が最新版となっています。また、この細り表は当场が開発したカラマツ成長予測ソフトにも組み込まれ、丸太の末口径別の出材量を予測する際に用いられています。細り表、成長予測ソフトともに、最新版が当场ホームページ(<http://www.hro.or.jp/fri.html>)からダウンロード可能となっていますので、是非ご利用ください。

胸高直径(皮付き) 20 cm												
樹高 地上高	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	18.0	18.1	18.2	18.2	18.3	18.3	18.3	18.4	18.4	18.4	18.5	18.5
3	17.0	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9	17.9	18.0	18.1
4	16.0	16.2	16.5	16.7	16.8	17.0	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6
5	14.9	15.2	15.6	15.8	16.1	16.3	16.5	16.6	16.8	16.9	17.1	17.2
6	13.7	14.2	14.6	15.0	15.3	15.6	15.8	16.0	16.2	16.4	16.6	16.7
7	12.4	13.0	13.6	14.1	14.5	14.8	15.1	15.4	15.6	15.9	16.1	16.3
8	10.9	11.8	12.5	13.1	13.6	14.0	14.4	14.7	15.0	15.3	15.5	15.8
9	9.2	10.3	11.2	12.0	12.6	13.1	13.6	14.0	14.4	14.7	15.0	15.2
10	7.4	8.7	9.9	10.8	11.5	12.2	12.7	13.2	13.6	14.0	14.4	14.7
11	5.2	6.9	8.3	9.4	10.3	11.1	11.8	12.3	12.9	13.3	13.7	14.1
12	2.8	4.9	6.6	7.9	9.0	9.9	10.7	11.4	12.0	12.5	13.0	13.4

図-4 カラマツ細り表の例

相対幹曲線式でできること その2 材積の計算

図-3の曲線の直径を1/2の半径にすると、カラマツの幹の縦断面の形状を表した曲線が得られ、これを回転させることで、幹の立体的な形を再現できます。数学的には、幹曲線式を積分することで樹幹の体積、すなわちカラマツの材積を求めることが可能になります。北海道のカラマツの材積は、一般的に中島(1948)の立木幹材積表に基づいて計算されていますが、この材積表は北海道にはまだ高齢級のカラマツ林はほとんどなかった約70年前に作成されたものであり、大径化したカラマツの材積が正確に計算されているのかは検証されていませんでした。今回求めた幹曲線式は、胸高直径30~60cmの大径材のデータを加えていることから、大径材の材積も正確に計算できるのではないかと期待できます。そこで、幹曲線式から算出した材積と、中島の立木材積表から計算した材積とを、カラマツ材積の実測データを用いて比較してみました。比較に用いたのは、無間伐から材積間伐率50%まで5段階の密度管理を行った平取町のカラマツ間伐試験地の40年生時のデータです(八坂ら2009, 安久津ら2012)。各試験区から胸高直径がばらつくように5本ずつ伐採し、2mおきに直径を計測し、区分積法により実材積を求めたもので、成長経過の異なる25本、胸高直径16.1~31.4cmのカラマツの材積が得られています。これらについて相対幹曲線式と材積表によりそれぞれ材積を計算したところ、相対幹曲線式から得られた材積は実材積との間に統計的な差は見られませんでした。中島の材積表では統計的

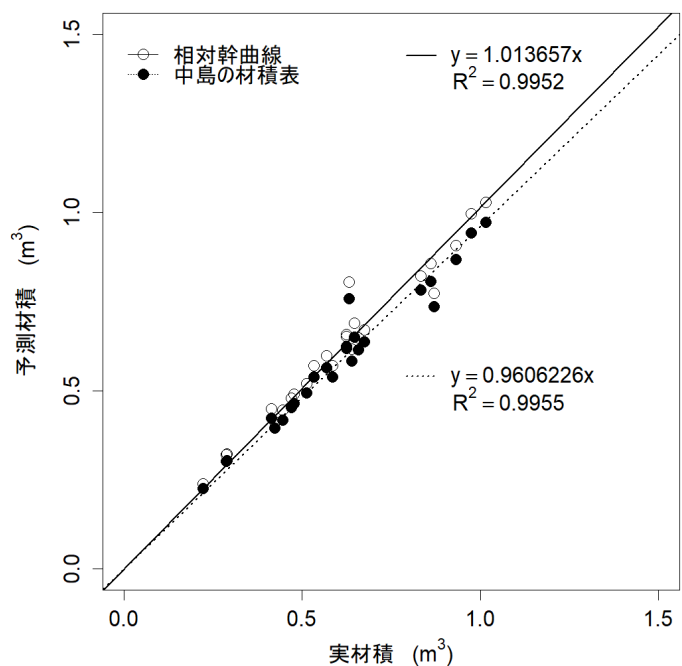


図-5 カラマツ材積の予測結果の比較

に有意に過小評価となっていました(図-5)。このことから、相対幹曲線式を用いれば中島の材積表よりも正確に材積を計算できることが分かりました。一方で、相対幹曲線式の作成に用いたデータの樹高と胸高直径の組み合わせで相対幹曲線式と中島の材積表により材積を計算したところ、両者の差は平均3%程度であり、その差は大径木よりも、むしろ中径木で大きくなる傾向が見られました。このことから、中島の材積表は大径木でも十分な実用性を保っているといえます。

おわりに

相対幹曲線式を用いることで、細りと材積を同一の数式に基づいて記述でき、科学的な統一性を持ってカラマツの幹の形を取り扱うことができるようになりました。また、相対幹曲線式による材積計算の精度は、これまで広く利用されている中島の材積表よりも高いことが分かりました。一方で、相対幹曲線式はパラメータに樹高や直径の影響を組み込んでいるため、材積計算の式が複雑になり、やや使いにくいことも事実です。広く使われている中島の材積表は計算が容易であり、平均3%程度の過小評価であることを理解した上で利用するのであれば、現在でも十分実用的といえることから、目的に応じて両者を使い分けるのがよいでしょう。

(森林経営部)

引用文献

- 安久津久・松本和茂・藤本高明・大野泰之・滝谷美香・八坂通泰(2012)カラマツにおける間伐強度の違いが年輪構造や丸太のヤング係数に及ぼす影響. 木材学会誌 58(5):249-259
- 中島広吉(1948)北海道立木幹材積表 メートル法の部. 46pp., 興林会北海道支部, 札幌
- 山田健四(2011)改訂版「北海道カラマツ細り表」を公開しました. 光珠内季報 161:12-14
- 山田健四・大野泰之(2016)樹幹形状の変化に対応した相対幹曲線による北海道カラマツの立木幹材積の予測. 日本森林学会誌 98(3):118-123
- 八坂通泰・山田健四・大野泰之・中川昌彦(2009)カラマツ人工林の間伐コスト削減における強度間伐の有効性: 間伐試験とシミュレーションによる検証. 日林北支論 57:89-91