

モーダル解析を用いた柔軟作業アームの制振制御

中西 洋介, 浦池 隆文

Vibration Control of One-Link Flexible Arm using Modal Analysis

Yohsuke NAKANISHI, Takafumi URAIKE

抄 録

トラス構造等の軸方向で断面が変化する柔軟作業アームの曲げ振動を、状態フィードバックを用いて制振する方法について論ずる。本技術により、アームの高速駆動や長尺化による各種作業の効率化を図ることが可能となる。まず、アーム固定端を軸に対して垂直方向に駆動する場合のアーム振動系の動特性を運動方程式として定式化する。次に、曲げ振動によるアームのたわみ変位を、断面が軸方向に一定であると仮定してモード展開し、系の運動方程式を状態方程式として定式化する。得られた状態方程式に、実験モーダル解析で求めた断面変化アームのモード関数を適用し、最適レギュレータを用いて計算した制御ゲインで状態フィードバックを施すことで、断面変化アームの低周波曲げ振動の抑制を可能とする。

キーワード：制振制御，最適レギュレータ，状態フィードバック，モーダル解析

Abstract

Vibration control technique by state feedback method against flexible One-link arm, the section of which is varying along its axis, is shown. Using this technique, various works using flexible arms would be efficient, because arms would be able to be driven rapidly, and to be longer without vibration. At first, dynamic characteristic of the system, in the case that the root of the arm is driven in the vertical direction against the axis of the arm, is formalized. Secondly, bending deflection of the arm is mode expanded, assuming that the section of the arm is constant along its axis, and the dynamic equation of the system above is formalized as state equation. Finally, modal shape functions obtained by modal analysis are substituted to the state equation, using which feedback control gains are calculated by optimal regulator. It is shown that the bending vibration of the varying section arm is well controlled by these feedback control gains.

KEY-WORDS : vibration control, optimal regulator, state feedback, modal analysis

1. はじめに

搬送用、溶接用等の各種作業アームは広く産業界で用いられており、作業効率を上げるためには、アームの高速駆動、あるいはアームのさらなる長尺化が必要である。しかし、それともない振動が励起され易くなるため、振動を抑制するために剛性が高く重いアームをアクチュエータの減速比を高

くして駆動しているのが一般的である。この場合、装置が大型化するため大動力を必要とし、さらに駆動力の大部分が駆動系の慣性や摩擦抵抗に費やされてしまうためエネルギーの無駄が多いという問題がある。

アームを軽量で低剛性のものにすれば、低動力で駆動でき、しかも高速な搬送作業が可能となる他、近年高騰し続けている金属材料費を削減することができることから、軽量・低剛

事業名：一般試験研究

課題名：高速作業時における車両搭載型作業機の振動抑制技術の開発

性アームの振動を抑制するための技術開発が求められている。

一方、北海道農業においては、国が近年のEPA/FTA交渉の動向を受け、生産効率の良い大規模農場経営による国産農産物の低コスト化を促進するための施策である品目横断的経営安定対策を策定したことから、今後さらに農業の大規模経営化が進み、農作業のさらなる効率化が求められると予想される。農作業は作業機を高速走行させる、あるいは作業機を大型化して作業幅を拡大することで作業効率が向上するが、振動が激しくなるため、高速走行あるいは作業機の大型化ができていないのが現状である。例えば、農薬・肥料散布機においては、長さ5～15mの作業アームに1～10Hz程度の低周波大振幅振動が励起されるため、高速走行散布作業を行うためには適切な振動抑制対策を施す必要がある。

本研究は、軽量・低剛性な柔軟作業アームに発生する振動抑制技術を開発し、アーム運動の高速化やアームのさらなる長尺化を可能とし、アームを用いた各種作業を効率化することを目的とする。なお、ここでは曲げ振動のみを対象とし、振動モードの状態フィードバックにより柔軟アームに発生する曲げたわみ振動を抑制・制御する。

著者らは先に、軸方向に一定長方形断面を有する柔軟アームの状態フィードバック制御について報告した¹⁾。しかし、実機で使用されている作業アームは、固定端に加わるモーメント負荷を軽減するために、先端に向かって断面積が小さくなっている。また、より複雑な断面形状を有するトラス構造作業アームも広く一般的に使用されている。

アームの断面積が一定であれば、比較的簡便にアーム振動を表す運動方程式を状態方程式へと定式化することができる。他、運動方程式を解くことで状態フィードバックに必要な振動モード関数を得ることが可能である。しかし、断面積が一定ではない場合、より正確には、断面積をアーム軸方向座標変数の積分可能な連続関数として表現できない場合、アームの運動方程式を状態方程式へと定式化することは極めて困難である。さらに、運動方程式を解析的に解いて振動モード関数を得ることができなくなる。

したがって、本稿では断面積が一定であると仮定して定式化した状態方程式の各要素に、実験モダ解析で求めた振

動モード関数から計算したパラメータを代入することで、近似的に断面積が一定ではないアームの状態方程式を求めた。

まず次章でアーム固定端を軸に対して垂直方向に駆動する場合の系の運動方程式を導き、状態方程式へと定式化する。次に第3章で制御則および試験装置について述べた後、第4章で実機による制振制御試験結果を示す。最後に第5章で振動検出用加速度センサがオフセット出力を含む傾斜時での制振制御試験結果を示す。

2. 柔軟アームのモデル化

2.1 つりあい方程式および弾性たわみ振動方程式

本稿では、アーム固定端の取付用ハブをアーム軸に対して垂直方向（たわみ振動方向）に駆動して、アームの曲げ振動を抑制・制御する²⁾。この場合の柔軟アーム制御系をモデル化するにあたり、軸方向で断面積、曲げ剛性および密度は一定であると仮定する。

柔軟アームを図1に示すような長さ l 、断面積 A 、密度 ρ 、曲げ剛性 EI (E : 縦弾性係数, I : 断面二次モーメント) の片持梁が、質量 M_h の取付用ハブに固定されているものとしてモデル化する。ハブ座標系 α - β を、原点がハブ初期位置、移動方向が β 軸方向となるように設定し、アーム座標系 x - y を原点がアームとハブの接点、 x 軸正方向がアーム軸方向、 y 軸正方向が β 軸方向となるように設定する。

ハブに対し β 軸方向に制御力 $F(t)$ を負荷した時、 β 軸方向の力のつりあい方程式は、 $y(x, t)$ をアームのたわみ変位として次式で表される。

$$(\rho Al + M_h) \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \rho A \int_0^l \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = F(t) - D \frac{d\beta}{dt} \quad (1)$$

ここで、左辺第1項はアームとハブが剛体運動することによる慣性力、左辺第2項はアームが弾性振動することによる慣性力を表す。また、右辺第2項は粘性係数を D とした場合の剛体運動に対する速度比例型の粘性抵抗である。

この場合のアームの弾性たわみ振動方程式は、自身の β 方向の剛体慣性力を強制外力として受けると考え、

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + EIc \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} = -\rho A \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (2)$$

と表すことができる³⁾。ここで、 c は粘性係数である。

2.2 状態方程式

力のつり合い方程式(1)とアームの弾性たわみ方程式(2)を状態方程式として定式化する。弾性たわみ $y(x, t)$ を固定端片持梁のモード形状関数 $\phi(x)$ を用いて、

$$y(x, t) = \sum a_i(t) \phi_i(x) \quad (3)$$

のように固有展開して式(2)を離散化する^{4),5)}。 $\phi_1(x)$ の時間

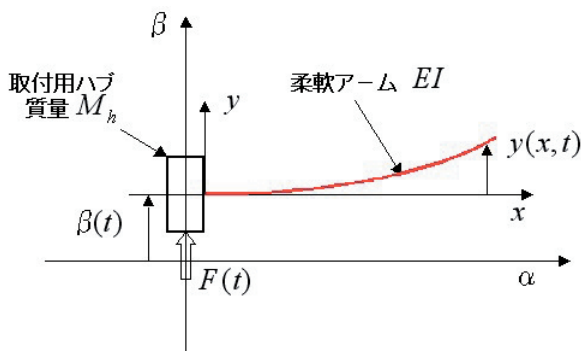


図1 柔軟アーム 制振制御モデル

変化を表す $a_1(t)$ を状態変数として、系に対して状態フィードバックを施すことで柔軟アームの振動が制御可能である。

式(3)を式(1)に代入して整理すると、

$$\ddot{\beta} + \frac{D}{M}\dot{\beta} + \frac{1}{M}\sum_i Q_i \ddot{a}_i = \frac{1}{M}F(t) \quad (4)$$

ただし、

$$M = \rho A l + M h \quad (5)$$

$$Q_i = \rho A \int_0^l \phi_i(x) dx \quad (6)$$

である。さらに、式(3)を式(2)に代入した後、両辺に $\phi_i x$ を乗じてアーム全長にわたって積分し、片持梁のモード形状関数 $\phi(x)$ に対して成立する直交条件式等の条件式を考慮して、次式を得る⁶⁾。

$$\ddot{a}_j + c\omega_j^2 \dot{a}_j + \omega_j^2 a_j + V_j \ddot{\beta} = 0 \quad (7)$$

ここで、

$$V_j = \int_0^l \phi_j(x) dx / \int_0^l \phi_j^2(x) dx \quad (8)$$

であり、 ω_j は固有振動数である。

なお、(3)式は全振動モードを含むが、実際の構造物では高次のモードはほとんど励起されず減衰も大きいのでここでは考慮しない。また、センサやアクチュエータの応答性の問題もあるので、通常高々3次程度までの振動モードを考慮すれば十分である⁷⁾。したがって、ここでは3次モードまでを考慮し、状態変数を、

$$\mathbf{x} = [a_1 \ \dot{a}_1 \ a_2 \ \dot{a}_2 \ a_3 \ \dot{a}_3 \ \beta \ \dot{\beta}]^T \quad (9)$$

と定義して、状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}F(t) \quad (10)$$

として定式化した。ここで、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} は各々系のシステム行列、駆動行列である^{APPENDIX1)}。

2.3 断面変化アームに対する状態方程式

断面積 A 、曲げ剛性 EI および密度 ρ が軸方向に一定であるという前提条件の下で、柔軟アーム振動系の基本動特性を状態方程式へと定式化した。これは、(10)式を導出する過程で必要となるアーム軸方向の各種積分計算の被積分項から、 A 、 EI 、 ρ を除外し、式の導出を進めるために必要となる条件である。さらに、(2)から(7)式を導く過程で使用した片持梁のモード形状関数 $\phi(x)$ の直交条件式も、上記前提条件の下で成り立つものである。

ここでは、軸方向断面積が一定であるとして状態方程式(10)式を導き出し、(10)式中に表れる Q_i を、

$$Q_i = \int_0^l \rho(x) A(x) \phi_i(x) dx \quad (11)$$

で再計算することで、軸方向で断面積および材質が変化する柔軟アームに対する状態方程式を求めた。

3. 制御方法および実験装置

3.1 制御則

柔軟アームの制振制御問題は、(10)式で表現されたシステムの状態変数 \mathbf{x} をすみやかに $\mathbf{0}$ に収束させるために必要となる外部入力 $F(t)$ を決定する問題として定式化することができる。ここでは状態フィードバック制御則

$$F(t) = -\mathbf{K}^T \mathbf{x} \quad (12)$$

により制御力 $F(t)$ を計算するものとし、制御ゲイン \mathbf{K} は状態変数 \mathbf{x} と制御入力 $F(t)$ を用いた2次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + F^T \mathbf{R} F) dt \quad (13)$$

が最小となるような制御入力 $F(t)$ を決定する最適レギュレータを用いて決定した^{8),9),10)}。ここで \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} は重み行列で、設計者が決定する設計パラメータである。 \mathbf{Q} を大きくすることで速応性が高くなるように、また \mathbf{R} を大きくすることで制御入力を抑えるように制御ゲイン \mathbf{K} が調整可能である。

3.2 試験装置

図2に試験装置のシステム構成を示す。アームのたわみ振動は、アームに設置した3個の加速度センサ（アナログデバ

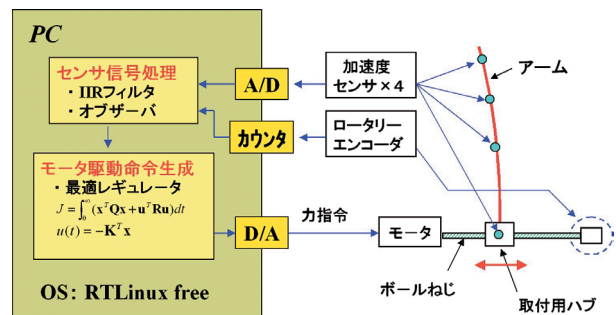


図2 試験装置システム構成

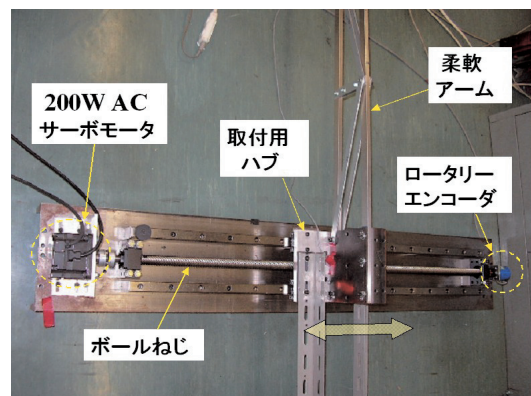


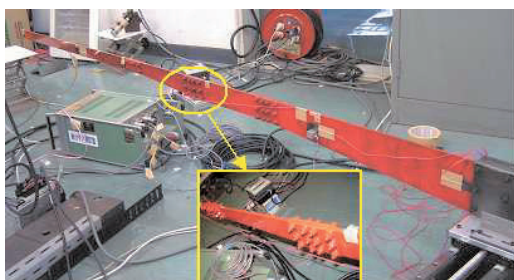
図3 制振制御試験装置

イセズ社MEMSシリーズ ADXL320) で測定し、ハブの移動距離は1000パルス/rev のロータリーエンコーダで測定した。これらの測定値から振動モード $a_i(t)$, ($i=1, 2, 3$) を計算し、オブザーバで全状態推定を行った後、式(11)を用いて制御力 $F(t)$ を計算した。 $F(t)$ をトルク指令としてトルク制御型200WACサーボモータへ送り、アーム固定端の取付用ハブを、40mm/revのボールねじを介してアーム軸に対して垂直方向に駆動することで、アームのたわみ振動を抑制・制御する構成となっている。図3に試験装置を示す。

3.3 試験アーム

本試験では、軸方向で断面積が変化している2種類の柔軟アームを試作し、制振制御試験を行った。

図4に試験アーム1を示す。4分割した厚さ6mmの鋼板をボルト締結し、全長2mとしており、先端に向かって断面を小さくしている(固定端幅125mm, 先端幅38mm)。また、図5に試験アーム2を示す。長さ2.5m, 断面積19×10×1.2tの上下2本のステンレス製角パイプを、幅12mm厚さ1.6tの平鋼で骨組み状に補強したトラス構造となっている(固定端幅125mm, 先端幅50mm)。



▲ 連結部拡大図

図4 試験アーム1

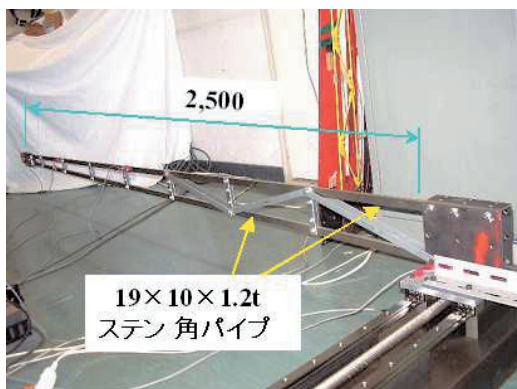


図5 試験アーム2

4. 制振制御試験

アームの弾性たわみを、モード形状関数 $\phi_i(x)$ で固有値展開し、 $\phi_i(x)$ の時間的变化を表す $a_i(t)$ を状態変数として状態フィードバック制御を行う場合、 $\phi_i(x)$ の関数形状を精度

よく知る必要がある。ここでは、実験モダ解析を行って振動モード関数求めた。

4.1 実験モダ解析

本稿において、アームの弾性たわみを固有値展開するために使用するモード形状関数は、固定端片持梁のモード形状関数である(式(3)参照)。したがって、実験モダ解析は、アーム固定端を万力で固定した後、インパクトハンマーで先端に衝撃を加え、インパクトハンマーからアームの適当な位置に設置した計10点の加速度センサへの伝達特性を市販アプリケーションME'scopeVES(楸システムプラス製)で解析して行った。

図6に試験アーム1に対して実験モダ解析を行った結

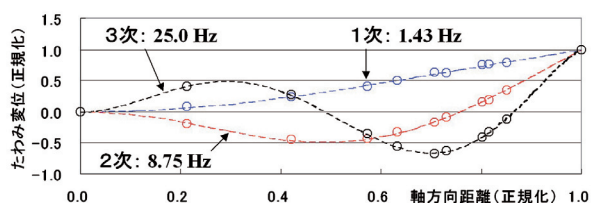


図6 実験モダ解析結果(試験アーム1)

果を示す。図中丸印は加速度測定位置を示し、点線は固定端における境界条件 $\phi_i(0)=0, d\phi_i(0)/dx=0$ を満足するように、加速度測定位置を最小二乗法で多項式近似したものである。なお、軸方向距離はアーム長さで、たわみ変位は先端のたわみ変位で正規化している。得られた1~3次までの多項式近似曲線を使用して(11), (8)式で表される Q_i, V_i を計算し、(10)式に代入することで試験アーム1, 2の振動を表す状態方程式を求めた。

4.2 制振制御試験結果

試験アーム1を制御するに当たり、最適レギュレータに設定した重み係数 Q, R の値と、その結果計算された制御ゲイン K を示す。ハブの速応性を高めるため、ハブ移動距離に対応する要素 $Q[7][7]$ を他に比べて大きく設定している。

$$Q = \text{diag}[100, 150, 50, 10, 50, 10, 1000, 20]$$

$$R = 0.008$$

$$K = [-600, -112, 273, 15.8, -144, -24.5, 351, 164]^T$$

図7に試験アーム1に衝撃力を負荷した場合の制御結果を示す。(a)は、アーム先端変位とアーム取付用ハブ移動距離、(b)は制御力である。図より、衝撃力を受けた直後の振幅280mm程度の先端変位が、約1秒で±22mm程度まで抑制されており、その時に要する制御力が300N程度となっていることが確認できる。

なお、先端変位を観察すると大振幅振動が抑制された後、±22mm程度の微振動が持続している。微振動を抑制するた

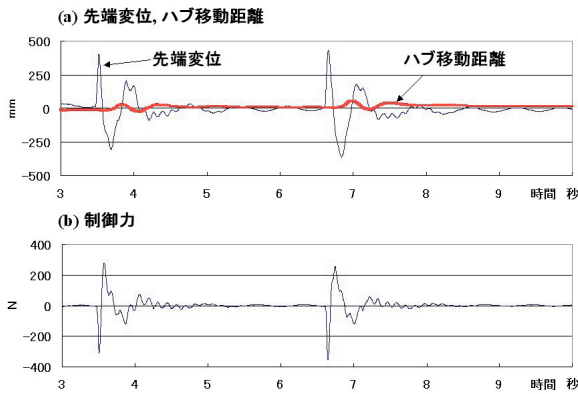


図7 制振制御試験結果 (試験アーム1)

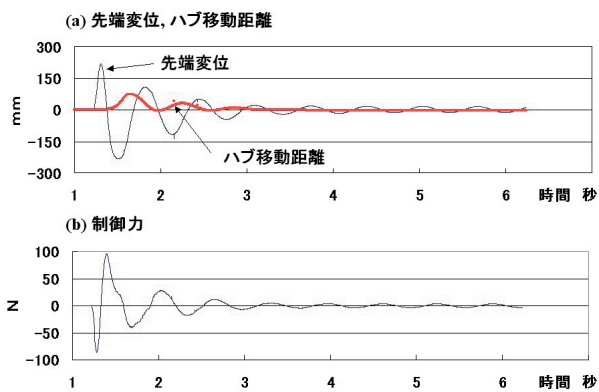


図8 制振制御試験結果 (試験アーム2)

めに状態フィードバック制御則により±5N程度の制御力が計算され、力指令としてモータドライバへ送られているが、ハブの移動距離は零である。これはボールねじ駆動部の動摩擦等起因する不感帯の影響によるものと考えられる。柔軟アームを精密位置決め等の用途に使用する場合は、この不感帯の影響を補正する必要があるが、農薬散布作業等へ使用する場合には問題無い範囲の微振動と考える。

試験アーム2 (トラス構造アーム) に対しても、試験アーム1と同じ値を最適レギュレータの重み係数 Q 、 R に設定した。その結果計算された制御ゲイン K を以下に示す。

$$K = [-642, -99.8, 124, 4.53, 173, 21.6, 351, 161]^T$$

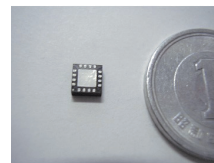
図8に試験アーム2に衝撃力を負荷した場合の制御結果を示す。図より、衝撃力を受けた直後の振幅210mm程度の先端変位が、約1.5秒で±22mm程度まで抑制・制御されており、その時に要する制御力が100N程度となっていることが確認できる。

4. 傾斜時制振制御試験

4.1 加速度センサ特性

本稿で使用した加速度センサ (アナログデバイス社 MEMS シリーズ ADXL320) は、重力加速度を検出する。

なお本稿では、アーム水平方向のたわみ振動制御を目的としているため、加速度検出方向が水平かつアーム軸に対して垂直となるように加速度センサを設置している。したがって、アームがアーム軸回りに傾斜する場合、加速度センサは重力加速度成分を検出し、出力値が傾斜角に比例して大きくなる。図9に加速度センサ仕様、図10に加速度センサ出力値と傾斜角の関係を示す。



仕様	
Output Type	Analog
Typical Band Width (kHz)	2.5kHz
Voltage Supply (V)	2.4 to 6
Range	+/- 5g
Sensitivity	174 mV/g
# of Axes	2
Sensitivity Accuracy (%)	±10
Temp Range (°C)	-20 to 70° C
Package	CP-16
Noise Density (µg/rtHz)	250

図9 加速度センサ仕様

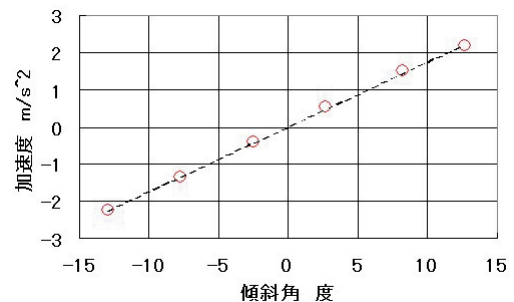


図10 加速度センサ出力値と傾斜角の関係

4.2 加速度センサ補正方法および傾斜時制御試験

農薬・肥料散布作業においては傾斜地での作業も想定される。したがって、図10に示すような特性を持つ加速度センサを使用して制振制御を行う場合、傾斜角に比例して大きくなるオフセット出力を補正する必要がある。

本稿ではアームに3個、さらに取付用ハブに1個の加速度センサを設置している (図2参照)。アーム傾斜時には全センサが同じ角度で傾斜するため、オフセット出力の大きさは全て同じ値となる。したがって、アーム上の3個のセンサ出力値と、アームのたわみ振動を検出しないハブ上のセンサ出力値の差分を取ることで、アーム上3点において傾斜オフセット成分を含まないたわみ振動加速度を得ることができる。

試験アーム2を軸方向に7.4度傾斜させ、上述の方法でアーム上の加速度センサの傾斜オフセット出力を補正しながら制振制御試験を行った結果を図11に示す。(a)は、アーム先端変位と取付用ハブ移動距離である。図8(a)と比較して、ほぼ同様の傾向を示していることが分かる。これは、上述の方法で

加速度センサの傾斜オフセット成分が適切に補正され、制振制御性に影響を与えないことを示す。

(b)にアーム先端に設置した傾斜オフセット補正前の加速度センサ出力値、およびハブに設置した加速度センサ出力値を示す。約12.5秒以降、ハブ加速度は一定値(約 -1.5m/s^2)となっており、ハブが停止していることを示す。この値が7.4度傾斜していることによるオフセット成分である。オフセット補正前の先端加速度は、12.5秒以降一定値を示しているハブ加速度を中心値として $\pm 2\text{m/s}^2$ 程度で微振動している。オフセット補正前の先端加速度とハブ加速度との差分が、アームたわみ振動による加速度となり、この値を制振制御に使用した。

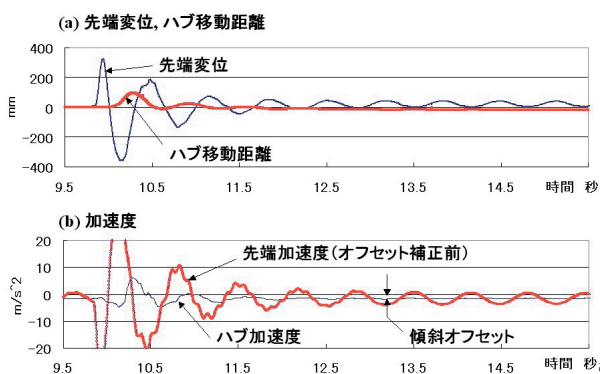


図11 傾斜時制振制御試験 (傾斜角7.4度)

5. まとめ

工場内ワーク搬送作業、あるいは農薬・肥料散布作業等、作業アームを用いた各種作業は、アームを軽量化することで高速駆動が可能となり、作業の効率化を図ることができるが、その反面、アームの低剛性化によるたわみ振動が課題となっている。本稿では、実機で広く使用されている軸方向で断面積が変化する柔軟作業アームの曲げたわみ振動を、振動モードの状態フィードバックで抑制・制御する方法について紹介した。具体的には、断面積が一定であるとの仮定の下に定式化した状態方程式に、実験モデル解析で求めた振動モード関数から計算したパラメータを代入して、断面変化アームの振動状態を表す状態方程式を導いた。得られた近似状態方程式に最適レギュレータを適用して状態フィードバックゲインを算出し、2種類の試験アームに対して制振制御試験を行ったところ、良好な結果を得た。さらに、加速度センサの重力加速度による傾斜オフセット成分を補正する方法を考案し、傾斜時制振制御試験を行い、適切に制御される事を確認した。

今後は、農業用農薬・肥料散布機の散布用作業アームに対し、本技術を応用・展開して行く予定である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、北海道大学大学院工学研究科人間機械システムデザイン専攻の小林幸徳教授より貴重なご意見を賜りました。ここに心より感謝申し上げます。

また、本研究で振動の計測・データ処理に使用した機械性能評価システムは、競輪補助事業により整備されました。記して感謝致します。

引用文献

- 1) 中西洋介ほか3名：柔軟作業アームの制振制御，北海道立工業試験場報告，No305，pp25-38，(2006)
- 2) 長南征二・高橋和彦：弾性ロボットアームのフィードバック位置決め制御，日本機械学会論文集(C編)，Vol.55 No.513，pp.1215-1220，(1989)
- 3) 福田俊男：フレキシブルロボットアームの制御，日本機械学会論文集(C編)，Vol.51 No.468，pp.2140-2144，(1985)
- 4) 近藤晋司ほか2名：柔軟構造物の振動制御におけるセンサおよびアクチュエータの位置，日本機械学会論文集(C編)，Vol.55 No.513，pp.1206-1214，(1989)
- 5) 福田俊男ほか4名：太陽電池パドルのフレキシビリティ制御，日本機械学会論文集(C編)，Vol.51 No.465，pp.979-984，(1989)
- 6) 入江敏博：機械振動学通論，朝倉書店，230PP.，(1984)
- 7) 市川邦彦：ロボットアームの角位置制御，日本機械学会論文集(C編)，Vol.57 No.534，pp.635-639，(1991)
- 8) 西原 修ほか3名：圧電アクチュエータによる片持ばりの振動制御，日本機械学会論文集(C編)，Vol.57 No.538，pp.1916-1923，(1991)
- 9) 古田勝久ほか4名：メカニカルシステム制御，オーム社，222PP.，(1990)
- 10) 吉川恒夫・井村順一：現代制御理論，昭晃堂，218PP.，(1995)

Appendix 1

断面積一定なる仮定の下に導き出した状態方程式(10)式のシステム行列 **A** および駆動行列 **B** を以下に示す。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{P} \times \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -Q_2 I_1 \omega_1^2 & -c_2 Q_2 I_1 \omega_1^2 & -Q_3 I_1 \omega_1^2 & -c_3 Q_3 I_1 \omega_1^2 & 0 & I_1 D \\ 0 & 0 & 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q_1 I_2 \omega_1^2 & -c_1 Q_1 I_2 \omega_1^2 & A_{43} & A_{44} & -Q_3 I_2 \omega_1^2 & -c_3 Q_3 I_2 \omega_1^2 & 0 & I_2 D \\ -Q_1 I_3 \omega_1^2 & -c_1 Q_1 I_3 \omega_1^2 & -Q_3 I_3 \omega_1^2 & -c_3 Q_3 I_3 \omega_1^2 & A_{65} & A_{66} & 0 & I_3 D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \\ Q_1 \omega_1^2 & c_1 Q_1 \omega_1^2 & Q_2 \omega_1^2 & c_2 Q_2 \omega_1^2 & Q_3 \omega_1^2 & c_3 Q_3 \omega_1^2 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = 1/P \times [0 \quad -I_1 \quad -I_2 \quad -I_3 \quad -1]^T$$

ここで、

$$P = M - \sum_{i=1}^3 Q_i V_i$$

$$A_{21} = -(M - Q_2 V_2 - Q_3 V_3) \omega_1^2, \quad A_{21} = -(M - Q_2 V_2 - Q_3 V_3) c_1 \omega_1^2$$

$$A_{43} = -(M - Q_3 V_3 - Q_1 V_1) \omega_2^2, \quad A_{44} = -(M - Q_3 V_3 - Q_1 V_1) c_2 \omega_2^2$$

$$A_{65} = -(M - Q_1 V_1 - Q_2 V_2) \omega_3^2, \quad A_{66} = -(M - Q_1 V_1 - Q_2 V_2) c_3 \omega_3^2$$

である。上式中の Q_i を(11)式で、また V_i を(8)式で計算することで、軸方向で断面積および材質が変化する柔軟アームに対する状態方程式を得る。