つくることを試みているが、割合よい接着性状をもつものが得られている。

このように、木材完全利用としての新しい木材化学は最近急速の進歩をとげており、更にリグニンを中心として、どんなものが飛出すかわからない。

木材資源に恵まれている北海道として、この研究の進歩と、発展に大いに期待したいものである。

—林産化学部長—

線　型　計　画　法 (2)

小　杉　隆　至

8月号に於てはごく簡単な例をとり、主としてシンプレックス計算について述べることによって、L.P.の大要を述べたつもりである。しかし実際に問題に取り組むにはまだまだいろいろ困難な点がある。今回は制限条件式に等式及び逆向きの不等式が入っている場合、更に退化の問題についてふれてみよう。

(1) 制限条件式に等式が入つている場合

先の例（8月号参照）に於ては制限条件式は全部不等式であったが、実際応用するにあたっては一部に等式が混入することも当然考えられる。具体例によって進めると、他の条件を8月号に於ける例題と等しくして、ただ $x_4=10$ (千尺2) という式を新らしく加えるこの式の意味は次の如く考えてもよいであろう。即ち販売面からの制約によってこの工場に於てはランバーコアー合板を必ず10(千尺2)生産販売しなければならず、10(千尺2)より多くても少くても経営上重大な制約を受けると仮定する。

このような場合には何をさしおいてもX_4を10(千尺2)生産しなければならないのであるから、この例ではX_4を10(千尺2)生産するのに必要な単板・コアー・プレス能力等を予め差し引いて残ったもので利益を最大にするX_1、X_2、X_3の生産量を求めればよいのであるが、そのような方法で最適計画が得られない場合もあるので、ここではそのままシンプレックス計算に入れる方法について述べることにする。

計画変数xのとり方を先の例と全く同様にして、新らたに $x_4=10$ なる等式を加えて再び制限条件式を示すと次の如くなる。（計算を容易にするために変数の単位を1,000尺^{2}とし、従って右辺は1/1,000になっている。）

$$x_1 \leqq 12 \cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x_2 \leqq 15 \cdots\cdots\cdots(2)$$
$$x_3 + x_4 \leqq 24 \cdots\cdots\cdots(3)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 53 \cdots\cdots\cdots(4)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leqq 60 \cdots\cdots\cdots(5)$$
$$x_4 \leqq 10 \cdots\cdots\cdots(6)$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 \leqq 180 \cdots\cdots\cdots(7)$$
$$x_4 = 10 \cdots\cdots\cdots(9)$$

上の式で新らしい(9)式によって(6)式の存在は無意味になる。従って $x_4=10$を(6)式として、$x_4 \leqq 10$ は省くことにする。又 $x_4=10$を(3)、(4)、(5)、(7) の式にそれぞれ代入することによって、それらの式からx_4 を消去して計算を簡単にすることも出来るが、ここでは理解しやすくするためにそのままにしておく。前回と同様調整変数λを導入して等式に導く。

$$x_1 + \lambda_1 = 12 \cdots\cdots\cdots(11)$$
$$x_2 + \lambda_2 = 15 \cdots\cdots\cdots(12)$$
$$x_3 + x_4 + \lambda_3 = 24 \cdots\cdots\cdots(13)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \lambda_4 = 53 \cdots\cdots\cdots(14)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + \lambda_5 = 60 \cdots\cdots\cdots(15)$$
$$x_4 + \lambda_6 = 10 \cdots\cdots\cdots(16)$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + \lambda_7 = 180 \cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで問題になるのは(16)式である。前回では全部不等式であったから

$x_1=0$、$x_2=0$、$x_3=0$、$x_4=0$

$\lambda_1=12$、$\lambda_2=15$、$\lambda_3=24 \cdots\cdots\cdots \lambda_6=10$、$\lambda_7=180$

という計画を出発点とすることができたのである。しかし今回は等式であるから$\lambda_6=0$が要求されているのである。従って出発点に $x_4=0$ とおくことは出来ない。そこでそのままでは具合が悪いので出発点としては一応形式的に$\lambda_6>0$となることを許し、そのかわり利益に大きいマイナスの作用を及ぼすようにする。この意味から目的式を

$$f=4x_1+5x_2+6x_3+13x_4-M\lambda_6 \cdots\cdots\cdots(18)$$

としMは非常に大きい数値とする。従ってλ_6が0より大きい場合には$M\lambda_6$も大きい数値をとり、他の製品の販売による利益（$4x_1+5x_2+6x_3$）をもってしても全

体の利益はマイナスになるものとする。

このように考えてシンプレックス表を作ると第1表の表aから出発することになる。前回の例では最初は何も生産しない計画であるから

x_1、x_2、x_3、$x_4=0$ そのときの利益はf＝0

という段階から出発したのであるが、今回は等式を含むので

x_1、x_2、x_3、$x_4=0$ そのときの利益はf＝－10M

というところから出発する。即ちここでは何も生産しない計画は－10Mの利益（損失）を生ずる。従ってまずx_4の生産を計画にとり入れ、表bに移って行く。

第1表 等式を含むシンプレックス表

		v_j→		4	5	6	13						−M			
	↓ v_i	↓変数→	S	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	計	θi
a		λ_1	12	1				1							14	
		λ_2	15		1				1						17	
		λ_3	24			1	1			1					27	24
		λ_4	53	1	1	1	1				1				58	53
		λ_5	60	1	1	1	2					1			66	30
	−M	λ_6	10				1						1		12	10→
		λ_7	180	2	2	3	10							1	198	18
		z_j-v_j	−10M	−4	−5	−6	−M−13								−11M−28	
b		λ_1	12	1				1							14	
		λ_2	15		1				1						17	
		λ_3	14			1				1			−1		15	14→
		λ_4	43	1	1	1					1		−1		46	43
		λ_5	40	1	1	1						1	−2		42	40
	→13	x_4	10				1						1		12	
		λ_7	80	2	2	3							−10	1	78	26.7
		z_j-v_j	130	−4	−5	−6							M+13		M+128	
c		λ_1	12	1				1							14	
		λ_2	15		1				1						17	15→
	→6	x_3	14			1				1			−1		15	
		λ_4	29	1	1					−1	1				31	29
		λ_5	26	1	1		1			−1		1	−1		27	26
	13	x_4	10										1		12	
		λ_7	38	2	2					−3			−7	1	33	19
		z_j-v_j	214	−4	−5					6			M+7		M+218	
d		λ_1	12	1				1							14	12
	→5	x_2	15		1				1						17	
	6	x_3	14			1				1			−1		15	
		λ_4	14	1					−1	−1	1				14	14
		λ_5	11	1					−1	−1		1	−1		10	11
	13	x_4	10				1						1		12	
		λ_7	8	2					−2	−3			−7	1	−1	4→
		z_j-v_j	289	−4					5	6			M+7		M+303	
e		λ_1	8					1	1	1.5			3.5	−0.5	14.5	
	5	x_2	15		1				1						17	
	6	x_3	14			1				1			−1		15	
		λ_4	10							0.5	1		3.5	−0.5	14.5	
		λ_5	7							0.5		1	2.5	−0.5	10.5	
	13	x_4	10				1						1		12	
	→4	x_1	4	1					−1	−1.5			−3.5	0.5	−0.5	
		z_j-v_j	305						1				M−7	2	M+301	◉

計算は第1表の如くなり、その結果は次の通りである

$$\begin{cases} x_1 = 4^{(\text{千尺}^2)} \\ x_2 = 15 \\ x_3 = 14 \\ x_4 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 8^{(\text{千尺}^2)} \\ \lambda_4 = 10 \\ \lambda_5 = 7 \\ \lambda_2、\lambda_3、\lambda_6、\lambda_7 = 0 \end{cases}$$

$f = 305^{(\text{千円})}$

$x_4 = 10$ となり等式の条件は満されている。（なお最終の表eに於ては退化が起っているから、条件内で$f=305$ なる利益を得る計画は外にもあるが、退化については後にふれることにする。この場合最適計画はいく種類も考えられ、上の計画はそのうちの一つである。）なおもう一つ付け加えておくとλ_6はランバーコアーの使い残しを表わすと同時に $x_4=10$ なる制約に対する生産量の不足分を表している。λ_6が0になることは等式の意味から当然のことである。

(2) 制限条件式に逆向きの不等式が入つている場合

今度は制限条件式中に逆向きの不等式が入っていたならばどうするか。具体例によってすすめると、

$x_3 \geqq 18$という式を新らしく加える。（$x_4=10$はもとにもどして$x \leqq 10$とする。）これは X_3 を$18^{(\text{千尺}^2)}$ 以上生産販売しなければならないという条件である。$18^{(\text{千尺}^2)}$ を下回った場合には経営上重大な制約を受けると仮定する。制限条件式は

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &\leqq 12 \cdots\cdots(1)\\
x_2 \qquad\qquad\qquad &\leqq 15 \cdots\cdots(2)\\
x_3 + x_4 &\leqq 24 \cdots\cdots(3)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqq 53 \cdots\cdots(4)\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqq 60 \cdots\cdots(5)\\
x_4 &\leqq 10 \cdots\cdots(6)\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &\leqq 180 \cdots\cdots(7)\\
x_3 \qquad\qquad &\geqq 18 \cdots\cdots(8)
\end{aligned}$$

となる。逆向きの不等式(8)では x_3 が$18^{(\text{千尺}^2)}$ 以上であることが要求されているので、使い残しではなく使い過ぎ（この場合は作り過ぎ）を表わす調整変数μ_1を導入して等式にする。

$x_3 - \mu_1 = 18 \cdots\cdots$ （8′）

しかしこのままでは出発点となる $x_3=0$ なる計画が許されないので等式混入の場合と同様に形式的に使い残しを表わすλ_8を用いて

$x_3 + \lambda_8 - \mu_1 = 18 \cdots\cdots(18)$

とし利益の式に$-M\lambda_8$を入れる。整理すると、

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &+ \lambda_1 = 12 \cdots\cdots(11)\\
x_2 \qquad\qquad\qquad &+ \lambda_2 = 15 \cdots\cdots(12)\\
x_3 + x_4 &+ \lambda_3 = 24 \cdots\cdots(13)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &+ \lambda_4 = 53 \cdots\cdots(14)\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &+ \lambda_5 = 60 \cdots\cdots(15)\\
x_4 &+ \lambda_6 = 10 \cdots\cdots(16)\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_6 &+ \lambda_7 = 180 \cdots\cdots(17)\\
x_3 \qquad\qquad &+ \lambda_8 - \mu_1 = 18 \cdots\cdots(18)
\end{aligned}$$

という連立方程式を得て、利益の式は

$$f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 - M\lambda_8 \quad \cdots\cdots(19)$$

となる。

シンプレックス表は第2表となり、

最適計画は

$$\begin{cases} x_1 = 12^{(\text{千尺}^2)} \\ x_2 = 15 \\ x_3 = 18 \\ x_4 = 6 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_4 = 2^{(\text{千尺}^2)} \\ \lambda_5 = 3 \\ \lambda_6 = 4 \\ \lambda_7 = 12 \text{（× 5 分）} \\ \lambda_1、\lambda_2、\lambda_3、\lambda_8 = 0 \end{cases}$$

$f = 309^{(\text{千円})}$

となり、逆向きの不等式の条件は満されている。

(3) 退化の現象がある場合

シンプレックス計算を行っている途中に於て時には次のような場合に出合うこともある。

まず新しくとり入れる変数を探すために $z_j - v_j$ の行に於て負の数のうちで絶対値の最大のものを選ぶのであるが、同じ数値のものが2つ以上ある場合にはいづれを選べばよいか。又 θi を計算してその最小値 θ が2個以上ある場合にはどれを選ぶか。また計算が進んで$z_j - v_j$ の行に負数が一つもなくなったときに、左の見出しにはいっていない変数の列の $z_j - v_j$ が0の場合（第1表の表eに於てλ_3は左の見出しに入っていないが、その $z_j - v_j$ は0となっている。）以上の如き現象を退化または縮退（Degeneracy）とよんでいる。

a) $z_j - v_j$ の行に最小値が2個以上ある場合

計算を行って行くにあたって $z_j - v_j$ がマイナスでしかも絶対値の大きいものから選んで行くということはそれ自身絶対的な規則ではない。一度とりあげた変数も計算が進むにつれて最後には追い出されることもあり、従ってどれからとりあげてもよいのである。しかし全くでたらめにやってもぐるぐるまわりになって、計算に手間どることもあるので一応方針に従って行った方がよい。例によって示すと他の条件を8月号の例と等しく、利益に於て x_4 の係数がx_3 のそれと等しい場合をあげよう。

$f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4$

とする。シンプレックス表は第3表の如くなる。

x_3 と x_4について $z_j - v_j$ をみるとどちらも-6である。この場合通常第1成分（λ_1の行）から順序に比較して行って小さい方をとる。第3表の例では第4成分までは共に等しく、第5成分に相異がある。小さい方

第2表　逆向きの不等式を含むシンプレックス表

		$v_i \rightarrow$		4	5	6	13								$-M$			
	$\downarrow v_i$	↓変数→	S	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	μ_1	計	θi
a		λ_1	12	1				1									14	
		λ_2	15		1				1								17	
		λ_3	24			1	1			1							27	24
		λ_4	53	1	1	1	1				1						58	53
		λ_5	60	1	1	1	2					1					66	60
		λ_6	10				1						1				12	
		λ_7	180	2	2	3	10							1			198	60
	$-M$	λ_8	18			1									1	-1	19	18→
		$z_j - v_j$	$-18M$	-4	-5	$-M-6$	-13									M	$-18M-28$	
b		λ_1	12	1				1									14	
		λ_2	15		1				1								17	
		λ_3	6				1			1					-1	1	8	6→
		λ_4	35	1	1		1				1				-1	1	39	35
		λ_5	42	1	1		2					1			-1	1	47	21
		λ_6	10				1						1				12	10
		λ_7	126	2	2		10							1	-3	3	141	12.6
	→6	x_3	18			1									1	-1	19	
		$z_j - v_j$	108	-4	-5		-13								$M+6$	-6	$M+86$	
c		λ_1	12	1				1									14	
		λ_2	15		1				1								17	15→
	→13	x_4	6				1			1					-1	1	8	
		λ_4	29	1	1					-1	1						31	29
		λ_5	30	1	1					-2		1			1	-1	31	30
		λ_6	4							-1			1		1	-1	4	
		λ_7	66	2	2					-10				1	7	-7	61	33
		x_3	18			1									1	-1	19	
	6	$z_j - v_j$	186	-4	-5					13					$M-7$	7	$M+190$	
d		λ_1	12	1				1									14	12→
	→5	x_2	15		1				1								17	
	13	x_4	6				1			1					-1	1	8	
		λ_4	14	1					-1	-1	1						14	14
		λ_5	15	1					-1	-2		1			1	-1	14	15
		λ_6	4							-1			1		1	-1	4	
		λ_7	36	2					-2	-10				1	7	-7	27	18
	6	x_3	18			1									1	-1	19	
		$z_j - v_j$	261	-4					5	13					$M-7$	7	$M+275$	
e	→4	x_1	12	1				1									14	
	5	x_2	15		1				1								17	
	13	x_4	6				1			1					-1	1	8	
		λ_4	2					-1	-1	-1	1						0	
		λ_5	3					-1	-1	-2		1			1	-1	0	
		λ_6	4							-1			1		1	-1	4	
		λ_7	12					-2	-2	-10				1	7	-7	-1	
	6	x_3	18			1									1	-1	19	
		$z_j - v_j$	309					4	5	13					$M-7$	7	$M+331$	◎

第３表　z_j-v_i最の小値が二つある場合

	v_j →		4	5	6	6									
↓ v_i	↓変数→	S	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	計	θi
	λ_1	12	1				1							14	
	λ_2	15		1				1						17	
	λ_3	24			1	1			1					27	
	λ_4	53	1	1	1	1				1				58	
	λ_5	60	1	1	• 1	• 2					1			66	
	λ_6	10				1						1		12	
	λ_7	180	2	2	3	10							1	198	
	z_j-v_j		−4	−5	−6	−6								−21	

第４表　θiの最小値θが二つある場合

	v_j →		4	5	6	13									θi
↓ v_i	↓変数→	S	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	計	
	λ_1	12	1				1							14	
	λ_2	15		1				1						17	
	λ_3	10			• 1	1			1					27	10
	λ_4	53	1	1	1	1				1				58	53
	λ_5	60	1	1	1	2					1			66	30
	λ_6	10			•	1						1		26	10→
	λ_7	180	2	2	3	10							1	198	18
	z_j-v_j		−4	−5	−6	−13								−28	

第５表　最終段階に退化がある場合

		v_j →		4	5	6	13						−M			
	↓ v_i	↓変数→	S	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	計	θi
e		λ_1	8					1	1	1.5			3.5	−0.5	14.5	5.33→
	5	x_2	15		1				1						17	
	6	x_3	14			1				1			−1		15	14
		λ_4	10							0.5	1		3.5	−0.5	14.5	20
		λ_5	7							0.5		1	2.5	−0.5	10.5	14
	13	x_4	10				1						1		12	
	→ 4	x_1	4	1					−1	−1.5			−3.5	0.5	−0.5	
		z_j-v_j	305						1				M−7	2	M+301	◉
f	→	λ_3	5.33					0.67	0.67	1			2.33	−0.33	9.67	
	5	x_2	15		1				1						17	
	6	x_3	8.67			1		−0.67	−0.67				−3.33	0.33	5.33	
		λ_4	7.33					−0.33	−0.33		1		2.33	−0.33	9.67	
		λ_5	4.33					−0.33	−0.33			1	1.33	−0.33	5.67	
	13	x_4	10				1						1		12	
	4	x_1	12	1				1							14	
		z_j-v_j	305						1				M−7	2	M+301	◉

をとるのであるからこの場合は x_3 をまずとりあげることになる。

b）θi の最小値 θ が２個以上ある場合

とり入れる変数を見出した上で、追い出す変数を探す場合に各 θi を計算してその最小値 θ のある行を見出すのであるが、最小値 θ が２個以上ある場合にはどうするか、例として第４表をあげる。

ここでは x_4 をとり上げ各θiを計算すると、最小値として10がλ_3の行とλ_6の行にある。従ってどちらを追い出すかということになる。

そこで θi を求めるときに分母として用いた x_4 の係数（この場合はともに１）で同じ行の第１成分を割って比較する。同じときは順次第２、第３と移って行く差が出たところで小さい数値のある行の変数を追い出

すことになる。この例では第2成分まではともに0で第3成分に於てλ_3の方は1、λ_6の方は0であるから、λ_6を追い出すことに決める。このような方法を摂動法（Method of Perturbation）といって数学的な説明もあるが、方法を述べておく程度にする。摂動法を用いることによって変数の出し入れが循環するのを防ぐことが出来る。

c） 最終の表に退化がある場合

計算が進んで $z_j - v_j$ の行に負数がなくなった場合に左の見出しに入っていない変数の列の $z_j - v_j$ が0であるときは退化が起っているのである。第1表の最終表に於てλ_3の列の $z_j - v_j$ は0となっている。ここに再び最終表をもって来てみよう。

第5表の表eを見ると λ_3 は左の見出しから追い出されているのであるが、上の見出しのλ_3の列で $z_j - v_j$ は0になっている。そこでλ_3を再び左の見出しにとり入れてみる。そのときのθiの最小値θは5.33でλ_1 の行にあるから、λ_1を追い出して表fを作る。表eと表fを比較すると、$z_j - v_j$ の行は全然変化しないが、他の行は変化している。計画としてとり入れられるものを整理すると、

表eの計画

$$\begin{cases} x_1 = 4^{(千尺^2)} \\ x_2 = 15 \\ x_3 = 14 \\ x_4 = 10 \\ f = 305^{(千円)} \end{cases}$$

表fの計画

$$\begin{cases} x_1 = 12^{(千尺^2)} \\ x_2 = 15 \\ x_3 = 8.67 \\ x_4 = 10 \\ f = 305^{(千円)} \end{cases}$$

となり、x_1 とx_3 が変化しているが、利益はともに305$^{(千円)}$ である。これは先の制限条件内での実現可能なる最大利益は 305$^{(千円)}$ であって、それを実現する計画は一種類だけではないことを示している。これが最終段階に於ける退化の特長である。又両者を任意の比率によって合せた計画も最適計画となる。表eの計画を40%、表fの計画を60%採用したとすれば、

$$x_1 = 4\times0.4+12\times0.6 = 8.8^{(千尺^2)}$$

$$x_2 = 15\times0.4+15\times0.6 = 15$$

$$x_3 = 14\times0.4+8.67\times0.6 = 10.8$$

$$x_4 = 10\times0.4+10\times0.6 = 10$$

という計画も 305$^{(千円)}$ の利益をあげる最適計画の一つであり、このように退化の場合には無限個の計画を作ることが出来る。その場合に使い残しを示すλの値も変ることはいうまでもない。

なお8月号に掲載された"線型計画法"中一部誤植がありましたので下記の如く訂正致します。

—経営研究室—

	誤	正
1頁、左、上6行目	ミンプレックス	シンプレックス
〃 右、上、13〃	1尺^2 づ	1尺^{2}づつ
2頁、右、上8〃	X_4, X_3, X X_1	X_4, X_3, X_2, X_1
5頁、左、上10〃	$z_j - u_j$ 130(×103)の	$z_j - v_j$ 130(×10^3)
5頁、右、上、3〃	表bで	表fで

道産主要広葉樹材をコアーとしたスプリント合板の強度性質について

斉 藤 藤 市
穴 沢 忠

Ⅰ まえがき

削片板は削片を結合剤で板状に成型したものであるから、その強度は個々の削片の強度、性質に支配されると云ってよく、従って削片の樹種は削片板の強度の重要なファアクターと考えられる。

工場廃材、林地廃材、小径木利用の点から出発したパーチクルボードの製造は、一定樹種を大量且継続的に入手するのが困難であり、異樹種の混合がよぎなくされているが、これについての研究は未だ殆ど行われていないのが現状である。本実験は異樹種の混交問題の予備試験として、北海道産の主要樹種5種類（シナセン、タモ、カバ、ナラ）をコアーとして単独に使用したスプリント合板の強度、性質を考察したものである。

Ⅱ 供試材料

削片：シナ、セン、タモ、カバ及びナラ、 1.4mm

線型計画法（2）

小杉隆至

8 月号に於てはごく簡単な例をとり、主としてシンプレックス計算について述べることによって、L.P.の大要を述べたつもりである。しかし実際に問題に取り組むにはまだまだいろいろ困難な点がある。今回は制限条件式に等式及び逆向きの不等式が入っている場合、更に退化の問題についてふれてみよう。

（1）制限条件式に等式が入っている場合

先の例（8 月号参照）に於ては制限条件式は全部不等式であったが、実際応用するにあたっては一部に等式が混入することも当然考えられる。具体例によって進めると、他の条件を 8 月号に於ける例題と等しくして、ただ $x_4=10$（千尺 2）という式を新らしく加えるこの式の意味は次の如く考えてもよいであろう、即ち板売面からの制約によってこの工場に於てはランバーコアー合板を必ず 10（千尺 2）生産販売しなければならず、10（千尺 2）より多くても少くても経営上重大な制約を受けると仮定する。

このような場合には何をさしおいても、X_4を 10（千尺2）生産しなければならないのであるから、この例では X_4を 10（千尺2）生産するのに必要な単板・コアー・プレス能力等を予め差し引いて残ったもので利益を増大にする X_1、X_2、X_3の生産量を求めればよいのであるが、そのような方法で最適計画が得られない場合もあるので、ここではそのままシンプレックス計算に入れる方法について述べることにする。

計画変数 x のとり方を先の例と全く同様にして、新たに $x_4=10$ なる等式を加えて再び制限条件式を示すと次の如くなる。（計算を容易にするために変数の単位を 1,000 尺 2 とし、、従って右辺は 1/1,000 になっている。）

$x_1 \leqq 12$ ………（1）

$x_2 \leqq 15$ ………（2）

$x_3 + x_4 \leqq 24$ ………（3）

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 53$ ………（4）

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leqq 60$ ………（5）

$x_4 \leqq 10$ ………（6）

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 \leqq 180$………（7）

$x_4 = 10$………（9）

上の式で新しい（9）式によって（6）式の存在は無意味になる。従って $x_4=10$ を（6）式として、$x_4\leqq 10$ は省くことにする。又 $x_4=10$ を（3）、（4）、（5）、（7）の式にそれぞれ代入することによって、それらの式から、x_4 を消去して計算を簡単にすることも出来るが、ここでは理解しやすくするためにそのままにしておく。前回と同様調整変数λを導入して等式に導く。

$x_1 + \lambda_1 = 12$………（11）

$x_2 + \lambda_2 = 15$………（12）

$x_3 + x_4 + \lambda_3 = 24$………（13）

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \lambda_4 = 53$………（14）

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + \lambda_5 = 60$………（15）

$x_4 + \lambda_6 = 10$………（16）

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + \lambda_7 = 180$………（17）

ここで問題になるのは（16）式である。前回では全部不等式であったから

$x_1=0$、　$x_2=0$ 、　$x_3=0$、　$x_4=0$

$\lambda_1=12$、$\lambda_2=15$、$\lambda_3=24$………$\lambda_6=10$、$\lambda_7=180$

という計画を出発点とすることができたのである。しかし今回は等式であるから$\lambda_6=0$が要求されているのである。従って出発点に $x_4=0$ とおくことは出来ない。そこでそのままでは具合が悪いので出発点としては一応形式的に$\lambda_6>0$ となることを許し、そのかわり利益に大きいマイナスの作用を及ぼすようにする。この意味から目的式を

$f=4x_1+5x_2+6x_3+13x_4-\lambda_6$………（18）

とし M は非常に大きい数値とする。従ってλ_6が 0 より大きい場合には Mλ_6も大きい数値をとり、他の製品の販売による利益（$4x_1+5x_2+6x_3$）をもってしても全

体の利益はマイナスになるものとする。

　このように考えてシンプレックス表を作ると第 1 表の表 a から出発することになる。前回の例では最初は何も生産しない計画であるから

　x_1、x_2、x_3、x_4＝0 そのときの利益は f＝0 という階段から出発したのであるが、今回は等式を含むので

　x_1、x_2、x_3、x_4＝0 そのときの利益は f＝－10M というところから出発する。即ちここでは何も生産しない計画は－10M の利益（損失）を生ずる。従ってまず x_4 の生産を計画にとり入れ、表 b に移って行く。

第 1 表　等式を含むシンプレックス表

計算は第 1 表の如くなり、その結果は次の通りである

$$\begin{cases} x_1=4^{(千尺2)} \\ x_2=15 \\ x_3=14 \\ x_4=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1=8^{(千尺2)} \\ \lambda_4=10 \\ \lambda_5=7 \\ \lambda_2、\lambda_3、\lambda_6、\lambda_7=0 \end{cases}$$

$f=305^{(千円)}$

$x_4=10$ となり等式の条件は満されている。（なお最終の表 e に於ては退化が起っているから、条件内で $f=305$ なる利益を得る計画は外にもあるが、退化については後にふれることにする。この場合最適計画はいく種類も考えられ、上の計画はそのうちの一つである。）なおもう一つ付け加えておくと λ_6 はランバーコアーの使い残しを表わすと同時に $x_4=10$ なる制約に対する生産量の不足分を表わしている。λ_6 が 0 になることは等式の意味から当然のことである。

（2）制限条件式に逆向きの不等式が入っている場合

今度は制限条件式中に逆向きの不等式が入っていたならばどうするか。具体例によってすすめると、

$x_3 \geqq 18$ という式を新しく加える。（$x_4=10$ はもとにもどして $x \leqq 10$ とする。）これは x_3 を $18^{(千尺2)}$ 以上生産販売しなければならないという条件である。$18^{(千尺2)}$ を下回った場合には経営上重大な制約を受けると仮定する。制限条件式は

$$\begin{aligned} x^1 \qquad\qquad\qquad & \leqq 12 \cdots\cdots\cdots (1) \\ x_2 \qquad\qquad & \leqq 15 \cdots\cdots\cdots (2) \\ x_3+x_4 & \leqq 24 \cdots\cdots\cdots (3) \\ x^1+x_2+x_3+x_4 & \leqq 53 \cdots\cdots\cdots (4) \\ x^1+x_2+x_3+2x_4 & \leqq 60 \cdots\cdots\cdots (5) \\ x_4 & \leqq 10 \cdots\cdots\cdots (6) \\ 2x_1+2x_2+3x_3+10x_4 & \leqq 180 \cdots\cdots\cdots (7) \\ x_3 \qquad & \geqq 18 \cdots\cdots\cdots (8) \end{aligned}$$

となる。逆向きの不等式（8）では x_3 が $18^{(千尺2)}$ 以上であることが要求されているので、使い残しではなく使い過ぎ（この場合は作り過ぎ）を表わす調整変数 μ_1 を導入して等式にする。

$$x_3-\mu_1=18 \cdots\cdots\cdots (8')$$

しかしこのままでは出発点となる $x_3=0$ なる計画が許されないので等式混入の場合と同様に形式的に使い残しを表わす λ_8 を用いて

$$x_3+\lambda_8-\mu_1=18 \cdots\cdots\cdots (18)$$

とし利益の式に $-M\lambda_8$ を入れる。整理すると、

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad & +\lambda_1=12 \cdots\cdots\cdots (11) \\ x_2 \qquad\qquad & +\lambda_2=15 \cdots\cdots\cdots (12) \\ x_3+x_4 & +\lambda_3=24 \cdots\cdots\cdots (13) \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & +\lambda_4=53 \cdots\cdots\cdots (14) \\ x_1+x_2+x_3+2x_4 & +\lambda_5=60 \cdots\cdots\cdots (15) \\ x_4 & +\lambda_6=10 \cdots\cdots\cdots (16) \\ 2x_1+2x_2+3x_3+10x_6 & +\lambda_7=180 \cdots\cdots\cdots (17) \\ x_3 \qquad & +\lambda_8-\mu_1=18 \cdots\cdots\cdots (18) \end{aligned}$$

という連立方程式を得て、利益の式は

$$f=4x_1+5x_2+6x_3+13x_4-M\lambda_8 \cdots\cdots\cdots (19)$$

となる。

シンプレックス表は第 2 表となり、

最適計画は

$$\begin{cases} x_1=12^{(千尺2)} \\ x_2=15 \\ x_3=18 \\ x_4=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_4=2^{(千尺2)} \\ \lambda_5=3 \\ \lambda_6=4 \\ \lambda_7=12（\times 5 分） \\ \lambda_1、\lambda_2、\lambda_3、\lambda_8=0 \end{cases}$$

$f=309^{(千円)}$

となり、逆向きの不等式の条件は満されている。

（3）退化の現象がある場合

シンプレックス計算を行っている途中に於て時には次のような場合に出合うこともある。

まず新しくとり入れる変数を探すために zj－vj の行に於て負の数のうちで絶対値の最大のものを選ぶのであるが、同じ数値のものが 2 つ以上ある場合にはいずれを選べばよいか。又θi を計算してその最小値θが 2 個以上ある場合にはどれを選ぶか。また計算が進んで zj－vj の行に負数が一つもなくなったときに、左の見出しにはいっていない変数の列の zj-vj が 0 の場合（第 1 表の表 e に於てλ_3は左の見出しに入っていないが、その zj－vj は 0 となっている。）以上の如き現象を退化まれは縮退（Degeneracy）とよんでいる。

a）zj－vj の行に最小値が 2 個以上ある場合

計算を行って行くにあたって zj－vj がマイナスでしかも絶対値の大きいものから選んで行くということはそれ自身絶対的な規則ではない。一度とりあげた変数も計算が進むにつれて最後には追い出されることもあり、従ってどれからとりあげてもよいのである。しかし全くでたらめにやってもぐるぐるまわりになって、計算に手間どることもあるので一応方針に従って行った方がよい。例によって示すと他の条件を 8 月号の例と等しく、利益に於て x_4の係数が x_3のそれと等しい場合をあげよう。

$f=4x_1+5x_2+6x_3+6x_4$

とする。シンプレックス表は第 3 表の如くなる。

x_3と x_4について zj－vj をみるとどちらも－6 である。この場合通常第 1 成分（λ_1の行）から順序に比較して行って小さい方をとる。第 3 表の例では第 4 成分までは共に等しく、第 5 成分に相異がある。小さい方

第 2 表　逆向きの不等式を含むシンプレックス表

第 3 表　zj－vj 最小値が二つある場合

第 4 表　θi の最小値θが二つある場合

第 5 表　最終段階に退化がある場合

をとるのであるからこの場合は x_3 をまずとりあげることになる。
b）θi の最小値θが 2 個以上ある場合
　とり入れる変数を見出した上で、追い出す変数を探す場合に各θi を計算してその最小値θのある行を見出すのであるが、最小値θが 2 個以上ある場合にはどうするか、例として第 4 表をあげる。
　ここでは x_4 をとり上げ各θi を計算すると、最小値として 10 が λ_3 の行と λ_6 の行にある。従ってどちらを追い出すかということになる。
　そこでθi を求めるときに分母として用いた x_4 の係数（この場合は共に 1）で同じ行の第 1 成分を割って比較する。同じときは順次第 2、第 3 と移って行く差が出たところで小さい数値のある行の変数を追い出

すことになる。この例では第 2 成分まではともに 0 で第 3 成分に於てλ_3の方は 1、λ_6の方は 0 であるから、λ_6を追い出すことに決める。このような方法を摂動法（Method of Perturbation）といって数学的な説明もあるが、方法を述べておく程度にする。摂動法を用いることによって変数の出し入れが循環するのを防ぐことが出来る。

c）最終の表に退化がある場合

計算が進んで zj－vj の行に負数がなくなった場合に左の見出しに入っていない変数の列の zj－vj が 0 であるときは退化が起っているのである。第 1 表の最終表に於てλ_3の列の zj－vj は 0 となっている。ここに再び最終表をもって来てみよう。

第 5 表の表 e を見るとλ_3は左の見出しから追い出されているのであるが、上の見出しのλ_3の列では zj－vj は 0 になっている。そこでλ_3を再び左の見出しにとり入れてみる。そのときのθiの最小値θは 5.33 でλ_1の行にあるから、λ_1を追い出して表 f を作る。表 e と表 f を比較すると、zj－vj の行は全然変化しないが、他の行は変化している。計画としてとり入れられるものを整理すると、

表 e の計画	表 f の計画
$x_1=4$ (千尺2)	$x_1=12$ (千尺2)
$x_2=15$	$x_2=15$
$x_3=14$	$x_3=8.67$
$x_4=10$	$x_4=10$
$f=305$ (千円)	$f=305$ (千円)

となり、x_1とx_3が変化しているが、利益はともに 305 (千円) である。これは先の制限条件内での実現可能なる最大利益は 305 (千円) であって、それを実現する計画は一種類だけではないことを示している。これが最終段階に於ける退化の特長である。又両者を任意の比率によって合せた計画も最適計画となる。表 e の計画を 40%、表 f の計画を 60%採用したとすれば、

$x_1=4\times0.4+12\times0.6=8.8$ (千尺2)

$x_2=15\times0.4+15\times0.6=15$

$x_3=14\times0.4+8.67\times0.6=10.8$

$x_4=10\times0.4+10\times0.6=10$

という計画も 305 (千円2) の利益をあげる最適計画の一つであり、このように退化の場合には無限個の計画を作ることが出来る。その場合に使い残しを示すλの値も変ることはいうまでもない。

—経営研究室—