

# 木質積層パネルの反りについて

- その理論的考察 -

吉田 弥明

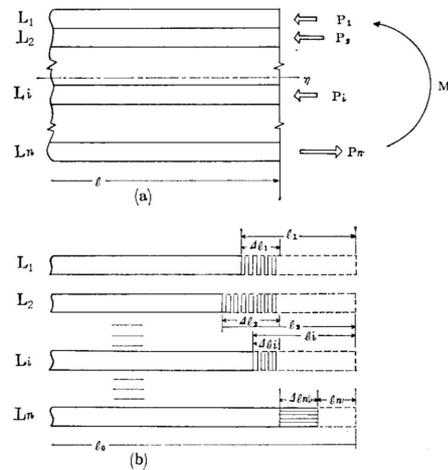
## 1. まえがき

一般に木質パネルのくると云われるものの中には、カップ状のもの、プロペラ状のもの、弓反りと呼ばれる二次曲線的なもの、またはこれらが組合わされたものなどがあるが、製造上あるいは使用上、問題とされるのはいわゆる弓反りと云われるパネルの長手方向に沿った二次曲線的な反りが最も多い。したがって、この二次曲線的な反りについて問題の所在が明らかになれば実用的な見地からも大いに有益であろう。このような観点から、短手方向の狂いは一応問題からはずして長手方向の反りについて、積層パネルの解析を試みた。対称がパネルである以上、板として取扱うことが望ましいが極めて複雑になるので梁として解析を試みることにした。

## 2. 積層パネルの一般的な解析

積層された複合パネルに反りが生じる場合、何らかの原因によって積層各層の寸度、および機械的性質に変化が生じる。この結果パネル内での力学的なバランスが崩れ、これを補う方向で応力が発生し、このため反りが発生し、パネル全体としてバランスが回復する。

これらの関係を第1図によって説明しよう。今、積層パネルが環境の変化によって反りを生じ、図(a)の状態ではバランスを回復しているとする。この時、パネルを構成する各層が接合されておらず、かつ自由に变形できるとすれば、各層は以前のバランス状態から (b) 図に示されるように  $l_1, l_2, \dots, l_n$  の変化を生じるであろう。しかし、これら各層は接合され、お互いに拘束を受け、 $l_0 - l$  の変形に抑えられる。この結果、各層には  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の応力を生じ、自由であれば生じたであろう変形がそれぞれ  $l_1, l_2, \dots, l_n$  だけ拘束される。



第1図 反り発生の機構

以上の関係を  $L_i$  層について式で表せば、

$$\left. \begin{aligned} l_i + \Delta l_i &= l_0 - l \quad (= \text{一定}) \\ l_i &= l_0 \alpha_i u_i \\ \Delta l_i &= l_0 \frac{P_i}{bh_i E_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1)$$

$\alpha_i$  = 構成層  $L_i$  の収縮率 (= 膨脹率とする)

$u_i = f_{ui} - l_{ui}$  :  $L_i$  の初期バランス状態での含水率  $f_{ui}$  と最終バランス状態での含水率  $l_{ui}$  との差

$P_i$  = 構成層  $L_i$  に生ずる応力 (引張の時正)

$b$  = パネルの巾

$h_i$  = 構成層  $L_i$  の材せい

$E_i$  = 構成層  $L_i$  の曲げ断係数

(接着層による影響は無視することにした)

木質系の場合環境の変化は含水率の変化と考えて差支えない。収縮率と膨脹率は異なるが同一とみなし、弾性係数も含水率によって異なるが等しいとした。木質系以外との複合パネルの場合は、水分以外の温度も大きく関与するので、これも考慮しなければならないが、ここでは木質系に限定し、温度による直接的な変

化はほとんど無視し得ることにする。

次に各構成層に生ずる応力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ の和はパネル全体としてバランスしているのであるから、「0」でなければならず、したがって

$$P_i = 0 \dots \dots \dots (1.2)$$

( $P_i$ は引張、即ち $l_0 - l_i > 0$ のとき正)

この $P_i$ によってパネルに曲げモーメント $M$ が生じ、撓み、即ち反りが発生する。この撓みは曲率で表わされ、と曲げモーメント $M$ との間には次の関係があり

$$\rho = \frac{M}{EIz} \dots \dots \dots (1.3)$$

曲げモーメント $M$ および曲げ剛性 $EIz$ は、それぞれ次の式によって示される。

$$EIz = \sum(EiAi) \dots \dots \dots (1.4)$$

$$M = \sum Pi \left( \frac{h_i}{2} + h_{i+1} + \dots + h_n - \bar{\eta} \right) \dots (1.5)$$

$$\bar{\eta} = \frac{\sum(Ei\bar{\eta}iAi)}{\sum(EiAi)} \dots \dots \dots (1.6)$$

$\bar{\eta}$  = パネル下縁から中立軸までの距離

$\bar{\eta}i$  = 下縁から $Li$ の断面重心までの距離

$Li$  =  $Li$ の中立軸に関する断面2次モーメント

ト

$Ei$  =  $Li$ の曲げ弾性係数

$Ai$  =  $Li$ の断面積

一方、曲率 $\rho$ と撓み、即ち反り矢高 $Y$ との関係は、次の式で表わすことができる。

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\rho \dots \dots \dots (1.7)$$

即ち、任意の点 $x$ における反り矢高 $Y$ は次の式によって表わされ、

$$Y = -\frac{\rho}{2} \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{\rho\ell^2}{8} \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (1.8)$$

したがって、反りの最大矢高はパネル長の中心に生じ、その値は次のようになる。

$$Y = \frac{\rho\ell^2}{8} \dots \dots \dots (1.9)$$

この結果、曲率 $\rho$ を求めれば反りの最大矢高は簡単に計算される。

### 3. 3プライ構成の場合

前説で導きだした各式を3プライ構成、特に中間層

の弾性をほとんど無視しうるペーパーコアパネルの様な場合について適用し、実際の反りについて考察してみよう。

(1.1)式は3プライの場合、それぞれ次のように表わすことができる。

$$l_1 + \Delta l_1 = l_2 + \Delta l_2 = l_3 + \Delta l_3 \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l_0 \alpha_1 u_1 \\ l_2 &= l_0 \alpha_2 u_2 \\ l_3 &= l_0 \alpha_3 u_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= l_0 \frac{P_1}{bh_1 E_1} \\ \Delta l_2 &= l_0 \frac{P_2}{bh_2 E_2} \\ \Delta l_3 &= l_0 \frac{P_3}{bh_3 E_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.3)$$

更に(1.2)式は次のようになる。

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \dots \dots \dots (2.4)$$

(2.1)~(2.4)式から $P_1, P_2, P_3$ は

$$P_1 = \frac{bh_1 E_1}{h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3} \times \{h_2 E_2 \alpha_2 u_2 - (h_2 E_2 + h_3 E_3) \alpha_1 u_1 + h_3 E_3 \alpha_3 u_3\}$$

$$P_2 = \frac{bh_2 E_2}{h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3} \times \{h_3 E_3 \alpha_3 u_3 - (h_3 E_3 + h_1 E_1) \alpha_2 u_2 + h_1 E_1 \alpha_1 u_1\}$$

$$P_3 = \frac{bh_3 E_3}{h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3} \times \{h_1 E_1 \alpha_1 u_1 - (h_1 E_1 + h_2 E_2) \alpha_3 u_3 + h_2 E_2 \alpha_2 u_2\}$$

ここで、 $t_1 = \frac{h_2}{h_1}, t_2 = \frac{h_3}{h_1}, e_1 = \frac{E_2}{E_1}, e_2 = \frac{E_3}{E_1}$

とおけば

$$P_1 = \frac{bh_1 E_1}{t_2 e_2 + t_1 e_1 + 1} \times \{t_1 e_1 \alpha_2 u_2 - (t_1 e_1 + t_2 e_2) \alpha_1 u_1 + t_2 e_2 \alpha_3 u_3\} \dots \dots \dots (2.5)$$

$$P_2 = \frac{t_1 e_1 bh_1 E_1}{t_2 e_2 + t_1 e_1 + 1} \times \{t_2 e_2 \alpha_3 u_3 - (t_2 e_2 + 1) \alpha_2 u_2 + \alpha_1 u_1\} \dots \dots \dots (2.6)$$

$$P_3 = \frac{t_2 e_2 bh_1 E_1}{t_2 e_2 + t_1 e_1 + 1} \times \{\alpha_1 u_1 - (1 + t_1 e_1) \alpha_3 u_3 + t_1 e_1 \alpha_2 u_2\} \dots \dots \dots (2.7)$$

ここで、仮定により中間第2層の弾性係数をほとんど無視し得るから、 $e_1 = 0$ となり、(2.5)~(2.6)にこれを代入して

$$P_1 = \frac{t_2 e_2 b h_1 E_1 (\alpha_3 u_3 - \alpha_1 u_1)}{t_2 e_2 + 1} \dots\dots\dots (2.5')$$

$$P_2 = 0 \dots\dots\dots (2.6')$$

$$P_3 = \frac{t_2 e_2 b h_1 E_1 (\alpha_1 u_1 - \alpha_3 u_3)}{t_2 e_2 + 1} \dots\dots\dots (2.7')$$

を得る。EI<sub>z</sub>は(1.4)式から次のようになり

$$EI_z = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 \dots\dots\dots (2.8)$$

I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>は

$$I_1 = \int_{h_2+h_3-\bar{\eta}}^{h_1+h_2+h_3-\bar{\eta}} \frac{b y^2 dy}{y} \\ = \frac{b h_1}{3} \{ (h_1+h_2+h_3-\bar{\eta})^2 + (h_1+h_2+h_3-\bar{\eta})(h_2+h_3-\bar{\eta}) + (h_2+h_3-\bar{\eta})^2 \}$$

$$I_2 = \int_{h_3-\bar{\eta}}^{h_2+h_3-\bar{\eta}} \frac{b y^2 dy}{y} \\ = \frac{b h_2}{3} \{ (h_2+h_3-\bar{\eta})^2 + (h_2+h_3-\bar{\eta})(h_3-\bar{\eta}) + (h_3-\bar{\eta})^2 \}$$

$$I_3 = \int_{-\bar{\eta}}^{h_3-\bar{\eta}} \frac{b y^2 dy}{y} \\ = \frac{b h_3}{3} \{ (h_3-\bar{\eta})^2 + (h_3-\bar{\eta})(-\bar{\eta}) + (-\bar{\eta})^2 \}$$

となる。

これを先の t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>, さらに  $k = \frac{\bar{\eta}}{h_1}$  を入れて表せば、次式のようになり、

$$I_1 = \frac{b h_1^3}{3} \{ (1+t_1+t_2-k)^2 + (1+t_1+t_2-k)(t_1+t_2-k) + (t_1+t_2-k)^2 \} \dots\dots\dots (2.9)$$

$$I_2 = \frac{e_1 b h_1^3}{3} \{ (t_1+t_2-k)^2 + (t_1+t_2-k)(t_2-k) + (t_2-k)^2 \} \dots\dots\dots (2.10)$$

$$I_3 = \frac{e_2 b h_1^3}{3} \{ (t_2-k)^2 + (t_2-k)(-k) + (-k)^2 \} \dots\dots\dots (2.11)$$

$\bar{\eta}$ は(1.6)式から

$$\bar{\eta} = \frac{E_1 \bar{\eta}_1 A_1 + E_2 \bar{\eta}_2 A_2 + E_3 \bar{\eta}_3 A_3}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} \\ = \frac{1}{b(h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3)} \\ \times \{ b h_1 E_1 (\frac{h_1}{2} + h_2 + h_3) + b h_2 E_2 (\frac{h_2}{2} + h_3) + b h_3 E_3 (\frac{h_3}{2}) \}$$

これを t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub> で表せば

$$\bar{\eta} = \frac{h_1}{e_2 t_2 + e_1 t_1 + 1} \\ \times \{ (\frac{1}{2} + t_1 + t_2) + e_1 t_1 (\frac{t_1}{2} + t_2) + \frac{e_2 t_2^2}{2} \} \dots\dots\dots (2.12)$$

したがって、kは次式のようになる。

$$k = \frac{1}{e_2 t_2 + e_1 t_1 + 1} \times \{ \frac{e_1 t_1^2}{2} (e_1 t_2 + 1) t_1 + \frac{e_2 t_2^2}{2} + t_2 + \frac{1}{2} \} \dots\dots\dots (2.13)$$

これを(2.9)~(2.11)式に代入し、さらに e<sub>1</sub> = 0 とすると、I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>は次のようになり、

$$I_1 = \frac{b h_1^3}{3 \cdot 4 (e_2 t_2 + 1)^2} \times \{ 12 e_2^2 t_2^2 t_1^2 + 12 e_2^2 t_2^2 (t_2 + 1) t_1 + 3 e_2^2 t_2^4 + 6 e_2^2 t_2^3 + 4 e_2^2 t_2^2 + 2 e_2 t_2 + 1 \} \dots\dots\dots (2.9')$$

$$I_2 = 0 \dots\dots\dots (2.16)$$

$$I_3 = \frac{t_2 b h_1^3}{3 \cdot 4 (e_2 t_2 + 1)^2} \{ 12 t_1^2 + 12 (t_2 + 1) t_1 + 3 e_2^2 t_2^4 + 6 e_2 t_2^3 + 4 t_2^2 + 2 t_2 + 1 \} \dots\dots\dots (2.11)$$

$$k = \frac{2 t_1^2 + e_2 t_2^2 + 2 t_2 + 1}{2 (e_2 t_2 + 1)} \dots\dots\dots (2.13')$$

したがって、EI<sub>z</sub>は

$$EI_z = E_1 (I_1 + e_2 I_3) \\ = \frac{b h_1^3 E_1}{12 (e_2 t_2 + 1)} \times \{ 12 e_2 t_2 (e_2 t_2 + 1) t_1^2 + 12 e_2 t_2 (e_2 t_2 + 1) (t_2 + 1) t_1 + 3 e_2^3 t_2^5 + 9 e_2^2 t_2^4 + 2 e_2 (3 e_2 + 2) t_2^3 + 2 e_2 (2 e_2 + 1) t_2^2 + 3 e_2 t_2 + 1 \} \dots\dots\dots (2.8')$$

となる。

曲げモーメントMは(1.5)式から

$$M = P_1 (\frac{h_1}{2} + h_2 + h_3 - \bar{\eta}) + P_2 (\frac{h_2}{2} + h_3 - \bar{\eta}) + P_3 (\frac{h_3}{2} - \bar{\eta}) \dots\dots\dots (2.14)$$

となる。これに P<sub>2</sub> = 0, e<sub>1</sub> = 0 を代入して、t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub> で表わせば、Mは次のようになり、

$$M = \frac{h_1 (2 t_1 + t_2 + 1) (e_2 t_2 P_1 - P_3)}{2 (e_2 t_2 + 1)}$$

さらに、(2.5'), (2.7')を代入して

$$M = \frac{e_2 t_2 b h_1^2 E_1 (2 t_1 + t_2 + 1)}{2 (e_2 t_2 + 1)} (\alpha_3 u_3 - \alpha_1 u_1) \dots\dots\dots (2.14')$$

を得る。したがって、 $\rho$ は(2.8')および(2.14')式から次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho &= Q (\alpha_3 u_3 - \alpha_1 u_1) \dots\dots\dots (2.15) \\ Q &= 6 e_2 t_2 (e_2 t_2 + 1) (2 t_1 + t_2 + 1) \\ &/ h_1 \{ 12 e_2 t_2 (e_2 t_2 + 1) t_1^2 + 12 e_2 t_2 (e_2 t_2 + 1) \\ &\times (t_2 + 1) t_1 + 3 e_2^3 t_2^2 + 9 e_2^2 t_2^4 + 2 e_2 (3 e_2 \\ &+ 2) t_2^3 + 2 e_2 (2 e_2 + 1) t_2^2 + 3 e_2 t_2 + 1 \} \\ &\dots\dots\dots (2.16) \end{aligned}$$

(2.15)式から、反りの方向については、下に凸に反る場合を正とするとの正負は逆になっている。即ち、(2.15)式においては、 ${}_3u_3 > {}_1u_1$ のとき $Q > 0$ であるから $\rho > 0$ となり、この場合パネルには上に凸に曲がるようなモーメントが働く。

ところで(2.15)式から明らかなように、中心層の弾性係数が表裏の弾性係数に比し著しく小さく、これを無視し得るような3プライ構成にあって、反りが生じない条件とは、 ${}_3u_3 - {}_1u_1 = 0$ となるような条件である。即ち(2.16)式が示すように $Q = 0$ であるから

$${}_3u_3 - {}_1u_1 = 0$$

が成立しなければならず、このためには

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} &= \frac{u_3}{u_1} \\ \alpha_1 &= \alpha_3 = 0 \\ u_1 &= u_3 = 0 \end{aligned}$$

のいずれかが成立つことが必要である。即ち、表裏の収縮率と含水率の差が反比例するか、収縮率が「0」かあるいは含水率の変化が生じないようにすることである。いずれにしても表裏構成層の寸度に変化が生じないようにするか、あるいは生じても相等しい変化を生じさせるようにすれば、反りの発生はない。しかし、一般的には材料の面からも、使用条件の面からも、このような条件を満すことは困難で、これに近づけるために色々の手段が取られている。

#### 4. 合板の場合

前節で述べたことをわかりやすく合板を例にとって説明する。合板も積層された複合パネルの一つであると考えられ、前節までに述べてきた理論が当然あてはまる。合板にあっては、表裏の樹種、厚さ構成が等しいのが一般的ではあるが、最近では異樹種構成もとられており、また表裏ではかなり材質の異なった単板を使用するようになってきている。以上のようなことを考慮して、3プライ合板の反りについて検討してみよう。

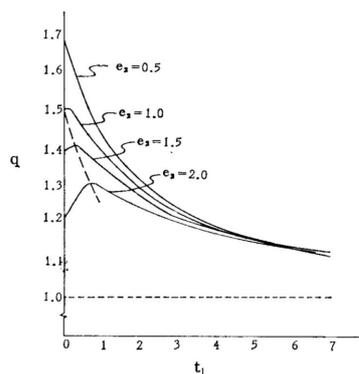
即ち、(2.15)および(2.16)式において $t_2 = 1$ とし、さらに合板の全厚を $h$ とすれば

$$h_1 = \frac{h}{t_1 + 2}$$

となり、これらを代入して

$$\begin{aligned} \rho &= q \times \frac{u_3 \alpha_3 - u_1 \alpha_1}{h} \dots\dots\dots (2.17) \\ q &= 12 e_2 (e_2 + 1) (t_1 + 2) (t_1 + 1) / 12 e_2 (e_2 \\ &+ 1) t_1^2 + 24 e_2 (e_2 + 1) t_1 + 3 e_2^3 + 19 e_2^2 \\ &+ 9 e_2 + 1 \end{aligned}$$

を得る。したがって、合板の反りは ${}_3u_3 - {}_1u_1$ 、 $h$ および $q$ の関係で決まってくるわけであるが、合板ではふつう厚さ、および表板については予め決まっている場合が多く、 $h$ は一定とみなしてよい。また先にも述べたように ${}_3u_3 - {}_1u_1$ は「0」となり難いので結局反りの大小を左右するのは $q$ の値である。この $q$ は表裏の弾性係数の比： $e_2$ 、および合板の厚さ構成比： $t_1$ で決定される値で、 $e_2$ をパラメーターにして図示す



第2図 e2およびt1とqとの関係

れば第2図のようになる。 $e_2$ が小さい程、 $t_1$ による $q$ の変動は大きくなるが、0~5の範囲で最も大きい。しかし、その範囲は $e_2=0.5$ では1.15~1.69と比較的大きいが、 $e_2=2$ では1.15~1.30と小さく、厚さ構成比の影響はたかだか15%位になってしまう。

一方、最も一般的な合板構成である表裏同一樹種の場合を考えてみよう。この時、 $e_2=1$ となり、(2.17)式は、これを代入して

$$\rho = \frac{3t_1^2 + 9t_1 + 6}{3t_1^2 + 6t_1 + 4} \frac{\alpha_1(u_3 - u_1)}{h}$$

となり

$$q = \frac{3t_1^2 + 9t_1 + 6}{3t_1^2 + 6t_1 + 4}$$

となる。この時 $q$ の $t_1$ による変動は第2図の $e_2=1$ に示されており、0~5の範囲の $t_1$ に対して1.15~1.50で、たかだか30%増である。ところで、表裏の含水率の変化の差( $u_3 - u_1$ )は容易に数倍になり得る可能性がある。また、表裏の単板で含水率の変化が等しい場合、即ち、 $u_1 = u_3$ の場合には、(2.17)式は次式のようになり、

$$\rho = \frac{q \cdot u_1}{h} (\alpha_3 - \alpha_1)$$

表裏単板の収縮率の差( $\alpha_3 - \alpha_1$ )を考えれば、これまた $q$ の変動はそう大きくはならない。

したがって、反りに対して量も大きな影響を与えるのは水分、即、表裏の含水率の変化の差であることが結論づけられる。もちろん、構成比： $t_1$ が大きくなれば反りの矢高は小さくなるが、合板のような場合にはおのずと制限があり、反りを防ぐためには何らかの手段を講じて水分をコントロールすることが必要である。

先に金内<sup>1)</sup>、池田<sup>2)</sup>らはペーパーコアサンドイッチ構造の反りに対して、次のような式を提唱している。

$$\delta = \frac{\ell \times (\Delta \ell_1 - \Delta \ell_3)}{8h} \dots \dots \dots (2.18)$$

ただし、 $\delta$  = 反り矢高、 $\ell$  = パネル長、 $\Delta \ell_1 - \Delta \ell_3$  = 表裏の伸縮の差である。この式は、(2.17)式において、 $t_1$ にした時に相当する。即ち、(2.17)式は次のよ

$$\rho = \frac{u_3 \alpha_3 - u_1 \alpha_1}{h}$$

うになり、さらに(1.9)式から、反り矢高は次のようになる。

$$Y = \frac{\rho \ell^2 (u_3 \alpha_3 - u_1 \alpha_1)}{8h}$$

ここで、 $l_0 = l$ とみなせるから、 $l_3 u_3 - l_1 u_1$ は(2.18)式の $l_1 - l_3$ に等しくなり、 $\delta = y$ となる。この場合、 $t_1$ が大きければ誤差は大きくなるが、 $t_1$ が小さい場合には第2図に示すような誤差を生じることになる。

### 5. あとがき

木質複合パネルの反りについて理論的に解析し、合板を例にとって3プライ構成の場合を考察してきたが、終局的には反りを防ぐことが目的である。このために基礎的な解析を試みたが、実際には、含水率による強度の変化、収縮・膨張のヒステリシス、接着層など考慮しなければならないことが多々ある。しかし、狂いの発生には含水率の影響がいかに大きいかは分っていただけだと思う。

複合パネルの反りを防ぐためには、この水分の変化というものをいかに抑えるかが問題である。反りの量は長手方向の伸縮率が明らかにされなければ求めることができず、この点では木材の繊維方向の膨張・収縮率に関するデータが重要な意味を持っているが現在のところこれらに関するデータは皆無に等しい。今後は木質パネルの需要は益々増えるであろうし、これらのデータをも考慮して、反りを防ぐための試験を計画したいと考えている。

### 文 献

- 1) 金内忠彦ほか：ペーパーコア合板の反りと撓みについて(1) 北林産試月報または木材の研究と普及、昭和39年3月号
- 2) 池田修三ほか：ペーパーコアパネルの品質試験(4)、北林産試月報または木材の研究と普及、昭和44年3月号

- 試験部 合板試験科 -  
(原稿受理48.3.10)