

森林調査と幾何確率

林 知己夫*

森林調査において、ピッターリッヒ法やそれと関連のある諸方法が用いられ、また電子計算機の普及につれてシミュレーションがさかんになりつつあるとき、昔問題にされていた幾何確率のパラドックスをあらためて想起する必要があると私は感じてきた。これは、確率のフィールドをどうとるか、に関連している問題である。幾何の様に「図」をもとにしたものに対して確率論的な推論を加えようとするときには、いろいろな確率の与え方があり、その与え方によって計算される確率が変わってくるので、パラドックスと言われているのである。その確率の与え方は、どれも、もっともらしいものであるところに注目すべき点がある。ピッターリッヒ法に関連したものは、土地上の幾何学に根ざすものであるから、これに確率論をもちこむとき当然幾何確率に対する配慮が必要になる。シミュレーションは、私が解決しようとする問題に対して、確率を導入し、これにもとづいて計算を行なうものであるから、確率モデルをどうつくり、どれにどう確率を与えるかが、問題の核心となり、この与え方によって解答の異なることも当然考えられるのである。現象に対して確率をどう与えて行くかという点で幾何確率に関連した思考上の注意を必要とするものである。

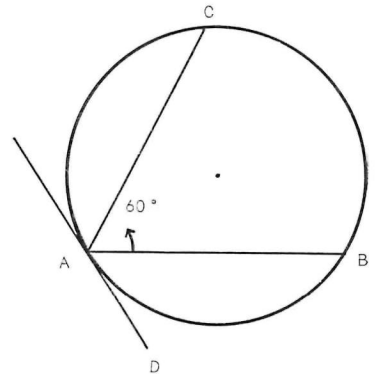
以上の様に考えてきたので、ここで幾何確率の古典的問題を述べ、あらためて注意を喚起したいと思って筆をとるわけである。いかなる確率の与え方が我々の現実の問題解決に対して最も妥当性があるか——妥当性ある確率モデルを如何に構成するか——は、単に理論的には解決できない（いずれももっともらしいのが普通であり、机上ではその優劣を定め難い）ものが多いので、こうした場合実際の調査データとその分析との対応づけが必須のものであると思う。

幾何確率とは

まず幾何確率とはどんなものか、よく確率論の教科書にある例であるが説明してみよう。

問題は次の様なものである。「半径1の円周がある。この円に内接する正三角形を考える。円内にある弦を引いたとき、この弦の長さがこの正三角形の一辺より長くなっている確率を求めよ」。

第1図をみよう。円周上に任意の一点Aをとる。このAは円周の上で、等確率で選ばれるものとする。点Aがある円周上の片 dr におちる確率は $dr/2\pi$ であるとする。さて、このAを始点として弦を引くことにする。Aにおいて切線ADを考える。正三角形ABCを考えAB, ACの範囲内($\angle CAB=60^\circ$)に弦が引かれるならば円に内接する正三角形の一辺($AB=BC=CA$)より長いことがわかる。ここで角度の意味で 180° の間、等確率でAから弦が引かれるとすれば、AB, ACの間



第1図

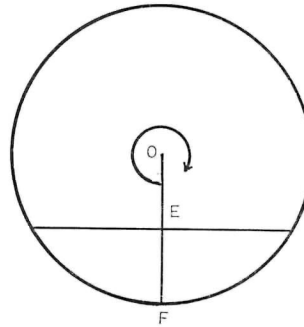
* 統計数理研究所

に弦のおちる確率は $60^\circ/180^\circ=1/3$ となる筈である。この $1/3$ は A の位置に依存しない。したがって、円周上で A を動かしたとして

$$\int_0^{2\pi} (1/3) \cdot dr/2\pi = 1/3$$

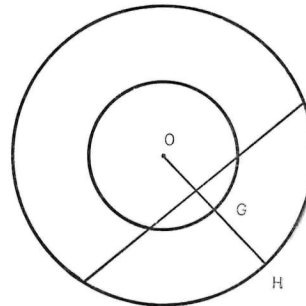
を求めれば、正三角形の一边より長い弦の生ずる確率となる。

次に第2図をみよう。いま中心 O より 360° の間、等確率で一つの半径 OF を引いたとしよう。半径の $1/2$ の点 E を求める。OE に直角に弦を引けば正三角形の一边に等しい弦が引ける。OE 上の点から OE に直角に弦を引けば正三角形の一边よりも長い弦の引けることは明らかである。上述の様な点 (これは弦の中点となる) が OF 上で OE の間にあれば正三角形の一边より長い弦を引くことが出来る。弦の中点を OF 上で等確率に選ぶとすればこれが OE の上にある確率は $1/2$ となる。この確率は OF の方向に依存しない。したがって、前と同様に OF の方向に関して確率積分すれば求める確率として $1/2$ を得る。前回は正三角形の一边より長い弦の引ける確率は $1/3$ であったが今回では $1/2$ になった。



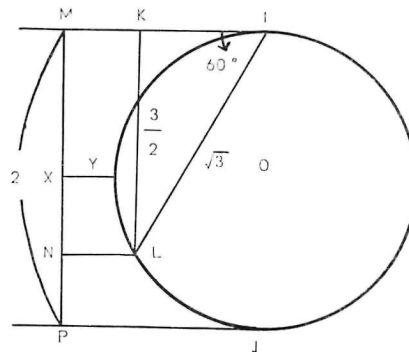
第 2 図

次に第3図をみよう。上述の意味の弦の中点を選ぶのに第2図の場合と異なり、面積の意味で等確率として選んでみよう。横軸を x 、縦軸を y とすれば点が $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$ の間にある確率は $dx dy/\pi$ なることを意味する。このとき $OG=GH$ とすれば、弦の中点 X が半径 OG の円内にあれば、X と O とを結び X を通り OX に直角な直線をつくり円との交点を求めれば、正三角形の一边より長い弦を得ることになる。弦の中点が半径 OG のの中に入る確率は $OG=1/2$ であるから、 $(1/2)^2\pi/\pi=1/4$ となる。従って、正三角形の一边より長い弦の引ける確率は $1/4$ となる。こんどは $1/4$ となり、前の $1/2$ の半分となってしまった。



第 3 図

さらに第4図をみよう。 360° の間、等確率で直径 IJ を選ぶとしよう。こうしてから IJ の一方の側に任意の長方形 IJPM を作る。どちらの側に作るかは確率 $1/2$ で定めるとしよう。MP の上に等確率で一点 X を求め、X から MI に平行に XY を引き円との交点 (IJ 上で長方形を作った側) を Y とし、I と Y とを結び弦を作る。この仕方では X が NP 上にあるとき—I から $\angle KIL=60^\circ$ になる様に弦を引き円周との交点を L とし、L から MI に平行に LN を引き MP との交点を N とする—上述の仕方では弦を引けば正三角形の一边より長い弦が引ける。NP 上に X がおちる確率は $\overline{NP}/\overline{MP}$ であり、計算により $(1-3/2)/2=1/4$ となる。J 側から考えても全く同様である。これも IJ の方向に依存しないし、いずれの側に長方形を作るかにも依存しない。したがってこういうものに対しても確率積分をすれば、こうした方法で弦をつくる限り、正三角形の一边より長い弦の引ける確率は $1/4$ となる。



第 4 図

以上観てくると、求める確率が $1/2$ から $1/4$ までであることになる。どれと言って理論的におかしなものではなく、その限りにおいて正しいのである。確率の導入の仕方が異なっているだけである。弦はただ引けるものではなく、「ある引き方」によってのみ引けるものなのである。弦の引き方を無視して弦を引くということを科学的に考えようとするのは出来ない。上の4例は4つの引き方を示したものである。その引き方の手続きの過程の上に、等確率を想定して確率を計算したのが上に述べたものなのである。

こうみえてくると「問題」そのものが、確率論の上から「体をなしている」ものではないのである。問題の設定そのものが悪いと言うことになる。「いかにして弦を引くか」ということを限定しない限り、もっともらしい幾つかの解答を出すことが出来、しかもいずれもその限りにおいて正しいということになる。なお、いろいろな「弦の引き方」それ自身にも確率を付与し、これらを総合して弦の長さが正三角形の一边より長くなる確率を計算することは可能である。例えば上の4つの引き方の各々を等確率 $1/4$ でとるとすれば、求める確率は

$$(1/3) \cdot (1/4) + (1/2) \cdot (1/4) + (1/4) \cdot (1/4) + (1/4) \cdot (1/4) = 1/3$$

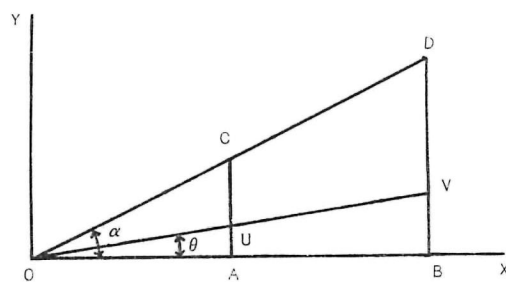
ということになる。しかし、ほかにもいろいろ弦の引き方があるから、どの様な引き方を採り上げるかが大事なことになる。いずれにしても妥当性の検討は、ほかにも求めなければならない。

これはさておき、上に述べた幾何確率的な問題に関係あることが、林学上の調査理論で確率をもちこむときおこっていないであろうか。この点は十分反省してみる必要があろう。

このような問題の核心はどういう形で確率モデルをもちこむかということにかかっている。机上の理論ではいづれも正しいが、どれが現実問題解決の上で妥当性があるかが、実際の調査データのとり方と共に講究されねばならないのである。やたらに確率をもちこむと所謂パラドックスに陥ってしまうことになる。幾何学的問題のとき、この様にいくつもの確率のもちこみ方がある所がパラドックスと言われるものの原因なのである。

シミュレーションの例

シミュレーションの場合、確率のもちこみ方によって求める解答が異なってくる例をあげて、一つの警告としておこう。第5図をみよう。梯形 $ABDC$ の面積を求めるとしよう。このため三角形 OBD を考え、これからシミュレーションで $ABDC$ の面積を出すことを考えよう。簡単のため $\angle OBD = \angle R = \angle OAC$, $OA = AB = BD = 4$ としておく。当然 $AC = 2$ となる。 $\angle BOD = \alpha$ としておく。



第5図

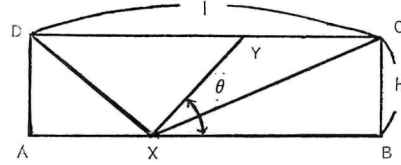
第1に面積の意味で等確率に点をおとし、これらの点が $ABDC$ 内にあるか三角形 OAC の内にあるかによって色分けし、おとした点 N 個のうち $ABDC$ 内にある点の数を N' とするとき、 $\lim_{N \rightarrow \infty} N'/N = ABDC$ の面積 / $\triangle OBD$ の面積、なることを利用し、 $ABDC$ の面積を出そうとする立場である。一点を OBD の中にとる確率を $dx dy / 16$ として計算すれば、 $ABDC$ の中に点のおちる確率は $12/16 = 3/4$ となる。したがって N を大にすればシミュレーションによって求まる N'/N は $3/4$ に近い値を得る。よって求める面積は既知の三角形 OBD の面積の $3/4$ となる。ここでは説明のため $ABDC$ の面積を上述の様にわかったものとしたが $ABDC$ の面積は未知で、既知の三角形 OBD の面積とシミュレーションから求まる N'/N の値とから $ABDC$ の面積を推定することになるのである。一方任意の角 θ を OX からとる。これを $d\theta/\alpha$ の等確率でとることにする。この直線を OUV とする。次に OV 上等確率で点をとるとする。 $ABDC$ 中にある直線部分 UV におちる確率は、 $OU = UV$ であ

るから $1/2$ となる。これは θ に依存しない。したがって θ について確率積分すれば $\int_0^\alpha 1/2 \cdot d\theta/\alpha = 1/2$ となる。したがって、こうした意味でシミュレーション (等確率に θ を選び次に OV 上で点を等確率に選び UV におちる数を勘定する) を行なえば点 N を大にすると、 $ABDC$ 内に属する点の数 N' は $1/2 \cdot N$ に近づく。つまり N'/N は $1/2$ に近くなる。なお、上述の直線 OUV を 0 から α まで回転すれば面積が覆ってしまうことは容易にわかる。こうして $ABDC$ の面積は $(\triangle OBD \text{ の面積}) \times (1/2)$ としてしまう。こうしたことは明らかにあやまりであるが、同様のことがシミュレーションの電子計算機実験でやられていないであろうか、検討の余地がある。

角度の様なものが等確率で混りこむとき慎重にあつかう必要がある。シミュレーションでは確率をどうとるか、が任意の場合があるので、どうしたモデルが実際に妥当かを考察することが必須のことで、幾何確率のときと同様な配慮を必要とするものがある。

野兎足跡調査での二つのモデル

私が最近遭遇し、悩んでいる問題を次に述べてみよう。野兎調査における一つの問題である。野兎調査で次の様なことを考えた。ある一定面積 lh (l は横、 h は縦をあらわす、第 6 図参照) の中に存在する野兎の足跡を、測量することなくただ AB



第 6 図

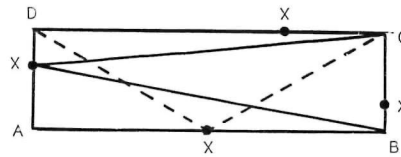
上に交又する野兎の足跡の数のみを知って推定しようとするのはできないか? なお、モデルの説明のため、足跡は直線であり、かつ AB を通らぬ足跡は lh の中に存在しないものとしておく。上述の様なことが可能であれば調査は実に楽になり 0 から 2π の間、等確率で選ばれた方向の一定長 l を歩き、交又する足跡の個数さえ勘定しておけば一定面積 lh の中に存在する足跡の総延長がわかるのであるから——勿論 AB に交又しなくて lh の中にある足跡は除く——便利なものである。

このため一つのモデルを考えて発表した (統計学集報第 14 巻, 第 2 号或いは北方林業 225 号, 42 年 12 月, 14 ~ 19 頁)。読まれていない方々もあるのでこのモデルを簡単に説明しておこう。第 6 図をみよう。あるく直線 AB 上 (長さ l) で足跡の存在する確率が等確率 dx/l でおこり、かつ足跡の方向を示す角度 θ が 0 から π まで等確率でおこるものとしよう。この様にして長さ XY の平均値を求めてみるのである。この長さは l, h の関数であって、 $\overline{\varphi(l, h)}$ とあらわせば

$$\overline{\varphi(l, h)} = \frac{1}{\pi l} \left[l^2 \log \left\{ \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1} + \frac{h}{l} \right\} - h(\sqrt{l^2 + h^2} - h) - 2lh \log \left\{ \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1} - \frac{l}{h} \right\} \right]$$

となる。 $l=10$ m, $h=2$ m とすれば、 $\overline{\varphi(l, h)}$ は 3.03 m となる。

次に別なモデルを考えた。第 7 図をみよう。第 7 図の長方形 (第 6 図と同じもの) を考え、この長方形の辺上の一点をとる確率が、4 周辺上で一様分布であるとする。つまり密度関数を $dx/2(l+h)$ とするものとする。次に一点 X がとられたあと、足跡の出る方向は前の場合と同様に 0 と π の範囲内で一様分布で密度分布は $d\theta/\pi$ とする。



第 7 図

こうした後 X が AB 上にある場合、 AD 上にある場合、 DC 上にある場合、 CB 上にある場合に分ける。そうして、 X

が夫々各周上にあるとき長方形の内部に向かって上の確率の与え方で直線を引き、それが AB と交又する場合を考えて、確率の計算を行なえば $\overline{\varphi(l, h)} = S/T$ となる。但し、

$$S = \frac{1}{2(l+h)\pi} \left\{ l^2 \log(\sqrt{1+(h/l)^2} + h/l) + h^2 \log(\sqrt{1+(l/h)^2} + l/h) + lh(\sqrt{1+(l/h)^2} - l/h) \right\}$$

$$T = \frac{1}{2(l+h)\pi} \left\{ 2l\pi - 2(l \tan^{-1} h/l - h \tan^{-1} l/h) - h \log(1 + (l/h)^2) + l \log(1 + (h/l)^2) \right. \\ \left. - 3lh(\sqrt{1 + (h/l)^2} - h/l) - 4lh \log(\sqrt{1 + (l/h)^2} - l/h) \right\}$$

である。\$T\$は、\$X\$から引いた直線が\$AB\$と交わる場合の確率をあらわし、\$S\$は\$X\$から引いた直線が\$AB\$と交わる場合、その直線の長さの平均（交わらぬ場合は\$0\$としている）をあらわす。計算すれば交わるという条件の下での長さの平均が出てくる。前の場合と異なったものが得られている。因に\$l=10\$ m, \$h=2\$ m とすれば \$\overline{S(l, h)}=2.86\$ m となり、前回のモデルとくらべ\$0.17\$ m 差があり約\$6\%\$の差異が出てきている。

どちらのモデルも一応もってもらいなのである。いずれをとるべきか、さらに新しいモデルをとるべきか、このままでははっきりしない。実際の調査データとあわせ検討しなければならない問題である。こうした一寸した問題でも、幾何確率的なものが入りこむと話は面倒になるのである。