ある地域における森林評価のための二，三のサンプリング方式

──── とくに林分の境界推定のためのサンプリング方式 ────

林 知 己 夫* 小 林 正 吾**

Some sample survey techniques for evaluation of forest
with slpecial reference to estimation of the
boundary ktween different stands

By Chikio HAYASHI* and Shōgo KOBAYASHI**

は じ め に

ある地域の森林評価は，面積が．A_j ha で，その ha 当り蓄積が V_j であったとき，総評価として

$$T = \sum_{j=1}^{R} p(V_j) \bullet A_j$$

ここで　$P(V_j)$ は V_j の ha 当り蓄積の評価

R は蓄積階級の総数

とするのが常識的とみられるが，これは現実的なものではない。V_j をもつ森林の面積 A_j が，ばらついて分布している小面積の集積であるか，一つづきの大面積であるかによって，評価が変ることが当然考えられるからである。この場合は，むしろ１ha 当り云々の蓄積をもつ森林の面積が，どう配置されているかを知ることの方が，評価の上に大切な意味があるものと考えられる。

いま，つぎのような試算で，$P(V_j)$ が一つづきの面積 B_{jk} によってどう変るかをみてみよう。 1ha 当り V_j をもつ一つづきの森林の面積の最小単位を Sha としておく。また，市場価格から伐倒，搬出費などを差引いた V_j の ha 当り素評価(立木価格)を $Q(V_j)$ とする。このようなものが考えられるかどうかに問題があるが，一応概念的には想定できるであろう。

実際に搬出のために必要な設備費(林道付設費＋林道の推持費＋搬出基本設備費)を W，その他搬出のための経費を U(ha 当り)とすると，ha 当りの搬出の費用は

$$\frac{W+US}{S} = \frac{W}{S} + U$$

となる。したがって

* 統計数理研究所　The lnstitute of Statistical Mathematics，Tokyo.

** 北海道立林業試験場　Hokkaido Forest Experiment Station，　Bibai，Hokkaido.

[北海道林業試験場報告　第９号　昭和46年９月　Bulletin of the Hokkaido Forest Experiment Station，N0．9，Sept.，1971]

$$P_s\left(V_j\right)=Q\left(V_j\right)+U+\frac{W}{S}$$

が実際の素価格となる。これが市場価格を上まわるか否かがその森林を開発するかどうかの問題点となる。上のP_S（V_j）とSの関係は図－1に示したようになる。

以上は全く単純な場合であり，実際にはもっと複雑な形態をとるであろうが，考えの基本になるものである。

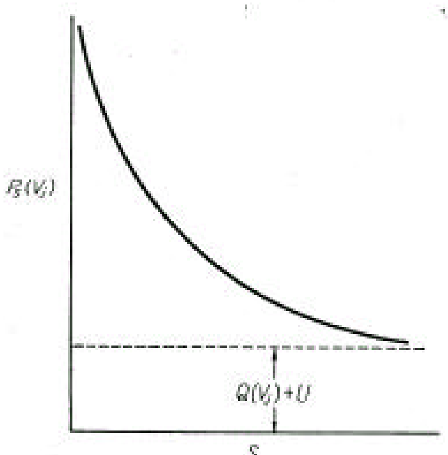
いま，V_jをもつM個の森林があるとすると

$$A_j=\sum_k B_{jk}$$

で，とくに，$B_{jk}=S$，k＝1，2，…，M

と仮定すると

$$A_j=M\bullet S$$



図－1　森林の面積と評価の関係

となる。B_{jk}(k＝1，2，…，M)がすべてあつまっているときの素価格は

$$P_{Aj}=Q(V_j)+U+\frac{W}{M\bullet S}$$

みなばらばらに分布しているときは，

$$P_{Aj}\left(W,W'\right)=Q\left(V_j\right)+U+\frac{W}{M\bullet S}+\frac{W'}{M\bullet S}$$

となり，W'は，ばらばらの度合いによって大いにことなるものである。たとえば

$$W'=F\bullet a$$

ここで　Fはばらばらに分布している森林をつなぐ距離(km)と高低差とその森林の個数Mの函数，

αは比例定数でW'がWにみあうディメンションをもつ単価

という形になる。

ばらばらに分布する森林M個のうちM′個を著しく離れているという理由で，対象からはずせば，P_Ajは

$$P_{Aj}\left(M,M'\right)=Q\left(V_j\right)+U+\frac{W}{\left(M-M'\right)S}+F\bullet\frac{M-M'}{M}\bullet a\frac{1}{\left(M-M'\right)S}$$

となる。

いま，V_jの市場価格を$\bar{Q}(V_j)$ ――これは現在の森林に対する作業操作に無関係としておく―― としたとき

$$D_{(Aj)}=\overline{Q}\left(V_j\right)-P_{Aj}>0$$

ならば作業操作に意味があることになり，これが一つの判別式となろう。この対象森林についての総差額は

$$D_{(Aj)}\bullet A_j\left(1-\frac{M'}{M}\right)$$

ということになる．それぞれのP_{Aj}に対して

$$P_{Aj}=Q\left(V_j\right)+U+\frac{W}{M\bullet S}$$

$$P_{Aj}(W,W')=Q(V_j)+U+\frac{W}{M\bullet S}+F\bullet a\bullet\frac{1}{M\bullet S}$$

$$P_{Aj}(M,M')=Q+U\frac{W}{(M-M')S}+F\bullet\frac{M-M'}{M}\bullet a\bullet\frac{1}{(M-M')S}$$

などを考えればよいわけである。

もし，開発作業対象が，V_j に対してのものだけでなくて，V_{J1}，V_{j2}，…，V_{jL} であったとしたとき，これを積み上げて考えればよい。このとき

$$P_{Ajl}(M_l,M_l')=Q(V_{jl})+U\frac{W}{(\text{対象全体の面積})}+F\left(1-\frac{M_l'}{M_l}\right)a\bullet\frac{1}{(\text{対象全体の面積})}$$

ここに　l＝1，2，…，L

となる。

全体としては

$$\sum_l D(A_{il})\bullet A_{jl}\left(1-\frac{M_L'}{M_l}\right)$$

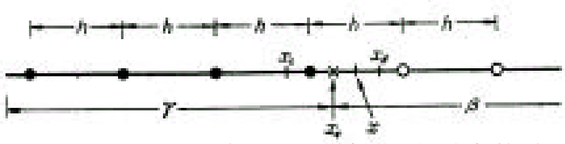
を考えればよいことになる。なお，$Q(V_j)$などの値は，ha 当りの蓄積 V_j および１立木当り価格から計算されうるものとした粗い考え方であるが，詳細に定義するとしても全体をまとめる考え方は同じである。

いずれにせよ，こういう計算ができるためには，V_j に対する A_j(ｊ＝1，2，…，R)のみを知るのではなく――V_j に対する A_j を知るためには，サンプル・スポットをｎ個おとし，そこにおける V_j を出し，V_j を示す個数を n_j とすれば，総面積 $A\cdot n_j/n$ によって A_j を推定できる――，V_j をもつ森林がどのくらいひとつづきになっているか，またその距離的な関係はどうであるかをみなくてはならない。このためには，森林の分布位置を推定するためのサンプリングを考える必要がある。

ことなる林分の間の境界線推定のサンプリングの方法

ことなる林分間の境界線が推定できるならば，ある林分の面積的な形状を推定することが可能になる。そこでここでは境界線を推定することを考えることにする。

まず，一番単純な１次元の場合（図‐2）について考える。式を出すためには，ことなる林分がいくつあっても同じなので，γとβの２つがあるとしておく。抽出点の位置は，間隔hの間で等確率で定められるものとする。ランダム・スタート（0 とｈとの間で等確率で抽出される）のみ等間隔抽出で格子点が抽出されることにする。ここでは，γがつづき，あとがらβがつづく場合について考える。



図‐2　1 次元の場合の境界点推定のサンプリング

このときγ，βと判定された２点の中央を x とする。これを境界として定めるとする。本当の境界は x_0 である。この x が $E(x)=x_0$ であることは明らかである。ランダム・スタートのみ等間隔抽出で点をとる以上，x は $x_0-\frac{h}{2}=xL, x_0+\frac{h}{2}=xH$ の間を等確率でとることになる。したがって $E(x)=E(x_0)$となり，x は x_0 の不偏推定値となる。

また，その分散は

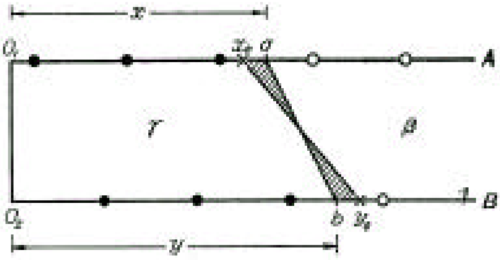
$$s_x^2=E(x-x_0)^2=\frac{h^2}{12}$$

となる。したがって，γの長さの推定値xの相対精度は

$$\frac{s_x}{x_0}=\frac{h}{2\sqrt{3}x_0}$$

によって与えられる。βについても同様である。

１次元の場合を拡張して２次元の場合を求めるのであるが，このときは長方形を考えれば全く同様に導くことができる。１次元の場合と同様にγとβの２つの場合について考える。γはx_0，y_0を端の点とする梯形とする(一般図形はこれで近似する)。 図 - 3 の直線A，B上に，１次元のときと同様にそれぞれ独立のランダム･スタートのh等間隔で点をおとし，それぞれγ，βの判別をやり，１次元のときのように中点をとってx，yを定める。O_1abO_2をもってγを指定する。$E(\mathbf{x})=\mathbf{x}_0$，$E(\mathbf{y})=\mathbf{y}_0$であるから形としては偏りのない推定となっている。



図－3　2 次元の場合の境界線推定のサンプリング

面積で考えれば，γは$\frac{x_0+y_0}{2}\bullet l$，その推定値は$\frac{x+y}{2}\bullet l$であるから，この差は平均的に０となる。つまり図 - 3 で斜線をほどこしたくいちがいの面積⊿は平均的に０となる。

この⊿の分散は

$$s_{\lhd}^2=E\left(\frac{x+y}{2}\bullet l-\frac{x_0+y_0}{2}\bullet l\right)^2$$

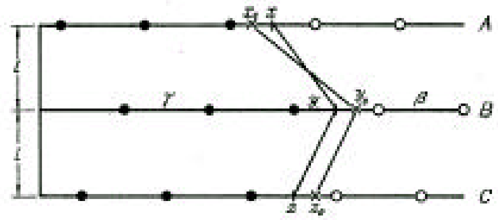
$$=\frac{l^2}{4}E\{(x+y)-(x_0+y_0)\ \}^2=\frac{l^2}{4}\left(s_x^2+s_y^2\right)=\frac{l^2}{4}\left(\frac{h^2}{12}+\frac{h^2}{12}\right)$$

$$=\frac{l^2h^2}{24}$$

となる。γの推定面積の相対精度は

$$\frac{s\lhd}{\frac{x_0+y_0}{2}\bullet l}=\frac{h}{\sqrt{6}}\bullet\frac{1}{x_0+y_0}$$

となる。抽出間隔hに比例することは興味深い。



図－4　3 本線の場合の境界線推定のサンプリング

ここまでの考えはただちに一般的な場合に適用できる。調査対象地区をlの幅($l=h$が望ましい)で区切り，それぞれ独立のランダム･スタートのみ等間隔サンプリングを行なう。こうしてV_jの値(勿論V_jは目的にあうような樹種階別にある幅をもつもの)によってスポットを判別する。こうじて，V_jのことなるところがあらわれたら，前述のように中点をとって境界とするのである。

なお，このようにしてそれぞれの面積をつなげて行くときの精度は，つぎのようにして計算できる。まず，３本線の場合について示す(図 - 4)。推定面積と真の面積の差を⊿とすると

$$\lhd=\frac{l}{2}\{(x+y)-(x_0+y_0)\}+\frac{l}{2}\{(y+z)-(y_0+z_0)\}$$

$$=\frac{l}{2}\{(x-x_0)+2(y-y_0)+(z-z_0)\}$$

となり，この⊿は明らかである。 「

$$E(\triangleleft)=0$$

は明らかである。

分散は，$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$，$(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)$，$(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)$の独立性から

$$s_{\triangleleft}^{2}=\frac{l^2}{4}\left(\frac{h^2}{12}+4\frac{h^2}{12}+\frac{h^2}{12}\right)=\frac{l^2h^2}{8}$$

一般にL本線があったときの⊿を$⊿_{\mathrm{I}}$とすれば，

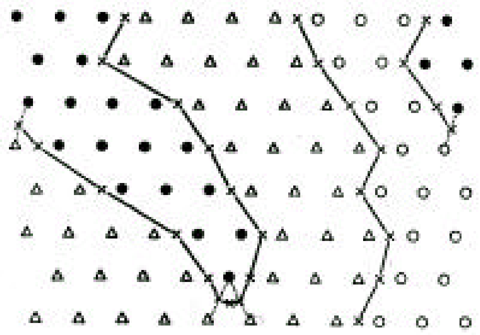
$$E(\triangleleft\, I.)=0$$

は明らかである。また，$⊿_{\mathrm{I}}$の分散は

$$s_{\triangleleft L}^{2}=E\left(\triangleleft_I^2\right)=\frac{l^2}{4}\left\{L\frac{h^2}{12}+3(L-2)\frac{h^2}{12}\right\}=\frac{l^2h^2}{24}(2L-3)$$

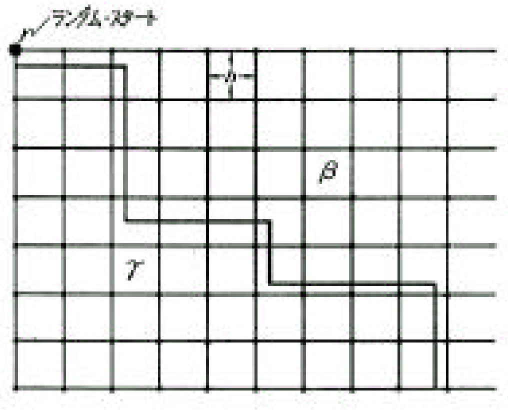
となる。

以上の方法によって推定境界線の模型を図‐5に示した。このとき左右両端の点での境界があいまいになる。このときは横ばかりでなく縦においても比較を行なう。すなわち「ある間の点をとったとき，それにもっとも近い点の標識を与える」というルールを定めれば全く同様に境界線がつくれる。このルールによれば，どんな点をサンプルしようが一般的に境界線をつくることができる。しかし，こうしたルールによる計算は面倒になるので，以下に示す格子点方式によってサンプルを抽出し計算を行なう。

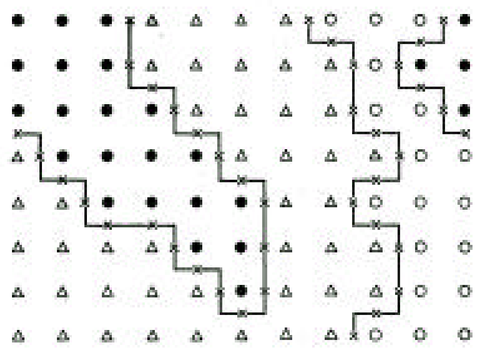


図－5　2次元の場合の等間隔サンプリングによる境界推定の模型

この格子点（網の目）は調査地域上にランダムにおかれるものである。すなわち，ランダムに1点をきめ（端点から一辺hの正方形の内部に1点をとる）その点を一辺hの格子点の抽出点とする。このとき厳密に考えれば，林分の平面図形によってx，yのそれぞれの平均値からのずれが正の相関をもったり，負の相関をもったりする。その図形はあらかじめわからないので，便宜的に図形はランダムにきまるものと考えるにの点前のようにいちいちランダム・スタートで抽出点をとっておけば間違いは多くないが，格子点ではこのように考えなくてはならない。



図－6　等間隔格子点による境界推定のサンプリング



図－7　等間隔格子点サンプリングによる境界線推定の模型については

こうすればすべて独立で計算できる。

林分の平面図形は図 - 7 のように縦横の格子線に平行であるとしておく。これも一つの仮定である。こうして前述の考えを利用するのである。このときは，図 - 7 のように境界がきまり，形の推定が偏よりのないものとなることがわかる。なお，この考え方は図形が必ずしも平行である必要はない。積分のとき行なう近似の考え方でこのような形で近似して（精度はhの大きさによって左右される）おけばよいわけである。この近似度は偏りとして別に評価されるものである。

ここで，求める林分の平面図形が上述のように格子線に平行な場合の計算を試みる。この考え方は全く前に示した方法と同様である。林分がいくつあってもつなげていけばよいので，前と同じくγ，βの2つとしておく図 - 8に示したようにγは O_1acdbO_2 である。サンプリングによって x，y を定めたので，推定図形は $O_1a'c'd'b'O_2$ である。x,y,z，が平均的にそれぞれ $x_0, y_0, \frac{h}{2}$ になることは明らかである。したがって，推定図形は実際の図形γの偏りのない推定値となる。すなわち，推定図形と実際の図形との面積の差を⊿とすれば

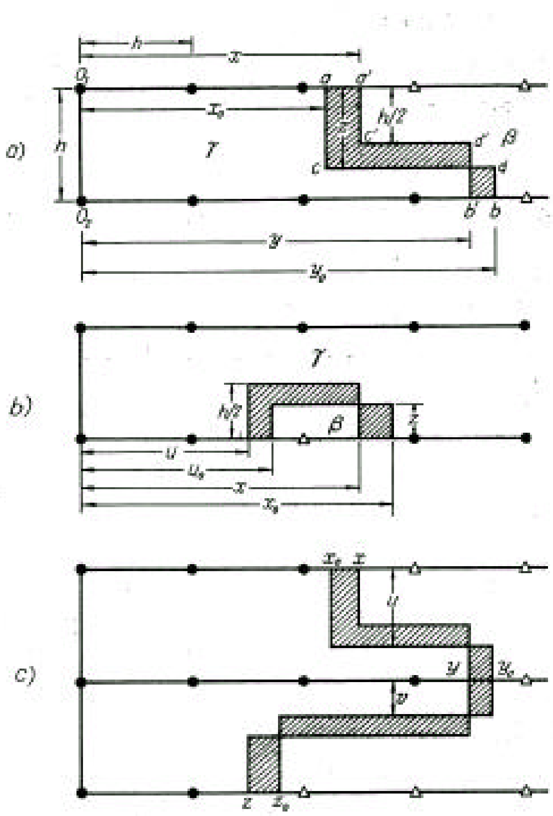


図 - 8　等間隔子点サンプリングによって推定境界線をひいた場合の面積誤差

$$\lhd = \frac{h}{2}(x+y) - \{zx_0 + (h-z)y_0\}$$

ここで，$E(x)=x_0, E(y)=y_0, E(z)=h/2, E(h-z)=h/2$ となるので

$$E(\lhd)=0$$

となる。

この⊿の分散は

$$s_{\lhd}^{2} = E(\lhd^2) = \frac{h^4}{24} + \frac{h^2}{12}(x_0 - y_0)^2$$

ただし，前述したように $(x-x_0)$ と $(y-y_0)$ は独立としてある。また，zと $(x-x_0)$，$(y-y_0)$ も同じく独立（縦横の抽出が独立）という前提である。個々の図形によれば，これは正あるいは負の相関をもつものであるが，どんな図形かわからないので，独立と考えておくのが妥当である。この結果はランダム・スタートの場合の分散に

第２項の相関項が付加されることになる。

　　また，図 - 8（b）のように境界が定められる場合があるが，この場合も同じようにして計算することができる。すなわち面積の差⊿は

$$\triangleleft=\frac{h}{2}(x-u)-z(x_0-u_0)$$

よって，　$E(\triangleleft)=0$

である。このときの分散$u^2_\triangleleft$についても前と同様に

$$\triangleleft=\frac{h}{2}(x-u)-\frac{h}{2}(x_0-u_0)+\frac{h}{2}(x_0-u_0)-z(x_0-u_0)$$

$$=\frac{h}{2}\{(x-x_0)-(u-u_0)\}+(x_0-u_0)\left(\frac{h}{2}-z\right)$$

とおき，各項の独立性から

$$s^2_\triangleleft=E\left(\triangleleft^2\right)=\frac{h^4}{24}+\frac{h^2}{12}(x_0-u_0)^2$$

となり，前の式と全く同じ形になる。

　　一般の図形のときはこうした式をつみあげていけばよいのであるが，２つをつみあげるとき，前の場合と同様に相関の項が入るので，その場合図 - 8(c)の計算例を示しておく。

$$\triangleleft=\frac{h}{2}(x+y)-\{ux_0+(h-u)y_0\}$$
$$+\frac{h}{2}(y+z)-\{vy_0+(h-v)z_0\}$$

ここで. $E(\triangleleft)=0$ は明らかである。

　　この場合の分散は

$$u^2_\triangleleft=\frac{h^2}{4}\left(\frac{h^2}{12}+4\frac{h^2}{12}+\frac{h^2}{12}\right)+\left\{(x._0-y_0)^2+(y_0-z_0)^2\right\}\frac{h^2}{12}$$

$$=\frac{h^4}{8}+\left\{(x_0-y_0)^2+(y_0-z_0)^2\right\}\frac{h}{12}$$

となる。これにさらにつなげ L 本線の場合には，第１項が前述の場合と同じく$\frac{h^4}{24}(2L-3)$となり，第２項は同じ形がつづくだけである。いままで格子点といってきたが，勿論ある大きさ（面積）をもつプロットを考えてもよい。

　　以上のような考え方で同じ特性をもった林分の面積的なひろがりのパターンを推定することが可能になり，はじめに述べた森林評価の調査に応用することができる。

林分のある評価方式とサンプリング

　　i でなる点（以下すべて同一面積のプロット）の ha 当りの蓄積評価を x_i とする。この x_i は，i 点における ha 当りの蓄積評価 $^{o}x_i$，i 点から γ_1 の距離の地点にあるプロットの蓄積評価 $^{1}x_I$，…，同じく γ_u 距離の地点にあるプロットの蓄積評価 $^{u}x_I$，…，に影響されて定まるものとする。これら $^{1}x_I$，･･･，$^{u}x_I$，…は確率変数とする。たとえば

$$x_i = a \bullet {}^0 x_i + \sum_{u=1} b^u \bullet S(g_u) \bullet E({}^u x_i)$$

ただし　　$\alpha > 0$，$1 > \beta \geqq 0$，$S(\gamma_u)$はγ_uなる距離にあるプロット面積(ha)とする。

$E({}^u x_i)$を確率変数${}^u x_i$の平均とする。

と考えよう。ここで$\alpha = 1$，$\beta = 0$ならその地点の蓄積評価のみに依存することになる。

さて，i点からなの距離にあるha当り蓄積評価${}^u x_i$は

$${}^u x_i = a_u {}^0 x_i + b_u + \boldsymbol{\varepsilon}_{u,i}$$

という回帰直線の関係があり，iはすべての点をうごく，$E(\varepsilon_u, {}_i) = 0$，${}^u x_I$と${}^o x_i$との相関係数が$\rho_u$であり，$u$，$i$，の距離の差のみの函数で$i$に依存しないものとする。こうすると

$$a_u = r_u$$

$$b_u = \overline{X} - a_u \overline{X}$$

ただし　　$\overline{X}$は全平均

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{u,i}^2) = s^2 (1 - r_u^2)$$

σ^2は全分散

となり平均的には

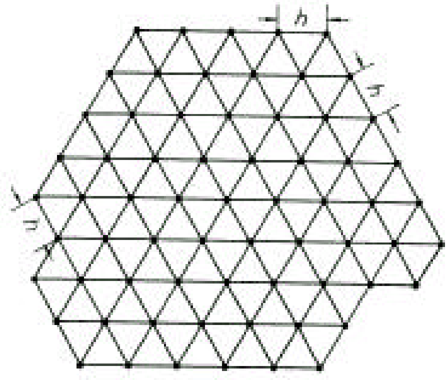
$$x_i = a \bullet {}^0 x_i + \sum_u b^u \bullet S(g_u)(a_u \bullet {}^0 x_i + b_u)$$

$$= a \bullet {}^0 x_i + \sum_u b^u \bullet S(g_u)(r_u \bullet {}^0 x_i + b_u)$$

$$= \left(a + \sum_n b^u \bullet S(g_u) \bullet r_u\right)^0 x_i + \left\{\sum_u b^u \bullet S(g_u) \bullet (1 - r_u)\right\} \overline{X}$$

とかける。

以上のように考えれば，森林全体の評価は，平均的にρ_uのパターンつまりiとuとの距離だけことなる地点（プロット）間の相関係数とXによって表現されることになる。したがって，標木抽出調査によりXおよびわの推定値を求めればよいことになる。ここでも，ランダム格子点抽出法が望ましいことになる。この場合図-9に示したような三角格子点抽出がより望ましい。これは，1点から等間隔にある地点をより多く抽出できるからである。



図－9　　三角格子点抽出法による抽出点

なお，γ_1，γ_2，…，γ_u，…として

$\gamma_u = u\gamma$，　　$u = 1, 2, \cdots$

ととることが一般に簡明であると思われる。

結　　び

森林の評価には，いろいろな立場があるし，評価方法もさまざまある。ここでは，森林評価の二つの方式を示した。その一つは開発の観点――林道建設による搬出――からみたもの，他の一つは，ある森林の評価は，その森林自身の評価のみではなく，開発対象となる周囲の森林の状態によって左右されるという観点から評価するもの

である。いずれの場合も，評価の対象となる森林の質および量的内容の分布状態が問題となる。したがって，この分布状態をサンプリングによって推定することが大事なことになる。このためには，森林の内容の相違によって区分される林分間の境界を知るためのサンプリングが開発され，その精度が明らかにされなければならない。ここでは，このサンプリングの方法の一つを理論的に示した。

ここで示した方形格子線によるサンプリング方法は，地形図上でしばしば行なわれている方形格子線単位の地形区分や，今後開発が予定される数値地形図などの利用上に，応用することができるものと考えられる。

なお本研究は，林業統計研究会の共同研究テーマである「未開発林の評価方法」の一端をなすものである。