

ワイブル分布とその利用例

阿部 信行

はじめに

最近、直径分布を推定する方法の一つとしてワイブル分布が研究されている。直径分布の推定は林業経営上、きわめて大切なことである。例えば、生産目標を立てる場合、林分の平均直径だけでなく、径級別本数の予測値があれば大変便利である。さらに最近、木材資源を径級別本数までの情報を含めて推定しようとの試みも行われており、筆者も相談を受けることが多い。径級別本数の推定には様々な方法が考えられるが、ワイブル分布は容易にパラメーターを求めることができ、しかも、径級別本数を算出する計算も容易なので、現場でもっと応用されてもよいと考えられる。そこで、ワイブル分布を紹介して、パラメーターの求め方、その利用方法等について述べてみたい。

ワイブル分布とは？

径級別本数は確率密度関数を用いて理論的に算出するのが現実的である。正規分布もこの一種である。この分布はよく知られているように、「釣鐘型」の分布であり、人工林の無間伐林分の直径分布によく適合する。しかし、下層間伐で下位の直径階が消滅すると適合が悪くなり、一般的ではない。そこで、正規分布に変わる確率密度関数として、ワイブル分布が研究されている。このワイブル分布は、1951年にスウェーデンのワイブル氏が提起したものであり、主に工学関係で故障率の分布を示すものとして使用されている。

いま、 c を胸高直径、 b 、 c をパラメーターとすれば、ワイブル分布は以下の式であらわされるものである。

$$f(x) = (c/b)(x/b)^{c-1} e^{- (c/b)x^c}$$

この場合、 $f(x)$ は確率密度を表わすので、全体の本数を乗ずることで、径級別本数を求めることができる。具体的な例は後で示すことにしよう。パラメーターのうち、 c の値により、ワイブル分布は図-1に示したような形をとる。 $c < 1$ の場合は逆J字型曲線、 $c = 1$ で指数分布、 $1 < c < 3.6$ で分布が左側に片寄り、 $c = 3.6$ で正規分布、 $c > 3.6$ で右側に片寄った分布形をとる。

以上のように、ワイブル分布は幅広い分布を表現できるといえる。林業の分野で注目されたのは、この性質の

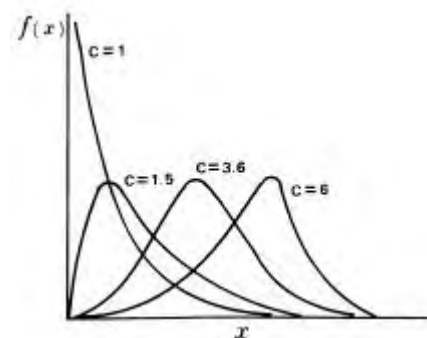


図 - 1 ワイブル分布の c の値による形状

ためであり，間伐等で直径分布が変わっても，それに対応して間伐後の分布を表現できるからである。

ワイブル分布のパラメーターの求め方

ワイブル分布のパラメーターは以下のようにして求めることができる。例として，久保トドマツ間伐試験 25 年生無間伐林分にワイブル分布を適用してみよう。

最小直径限界 a を求める。

これは，例えば林分の最小直径階が 4 cm の場合は 3 cm，6 cm の場合は 5 cm というように，最小直径階から 1 を引いて求める。表 - 1 の場合は $a = 3$ である。

林分の平均直径 \bar{D} を求める。

$$\bar{D} = (4 \times 25 + 6 \times 69 + \dots + 20 \times 8) / 720 = 10.73$$

林分の直径の標準偏差 s を求める。

$$s = \sqrt{4^2 \times 25 + 6^2 \times 69 + \dots + 20^2 \times 8} / 720 - 1.073^2 = 3.32$$

林分の変動係数 CVd を求める。

$$CVd = s / \bar{D} = 3.32 / 10.73 = 0.3094$$

CVd を用いて，各直径階から a を引いた場合の変動係数 CV を求める。この場合まず林分の平均直径 \bar{D} から最小直径限界 a の値を引いたものを E とする。

$$E = \bar{D} - a = 10.73 - 3 = 7.73$$

そして，次式で CV を求める。

$$CVc = (1 + a/E) \times CVd = (1 + 3/7.73) \times 0.3094 = 0.4295$$

CV の値に対応した C の値を表 - 2 から読みとる。 $CV = 0.4295$ に近い C の値は 2.5 である。

b の値は C の右隣の G (ガンマ関数の値，表 - 2) の値で E を除して求める。

$$b = E/G = 7.73/0.88726 = 8.7122$$

以上で，パラメーター b と C を求めることができる。

表 - 1 直径階別本数表

直径階(d) cm	4	6	8	10	12	14	16	18	20
本数(本)	25	69	124	180	151	95	53	15	8 (合計 720)
$= d - a$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$f(\) \cdot N(\text{理論値})$	16	78	140	167	147	98	50	19	5 (合計 720)

直径階別本数の計算方法

得られたパラメーターを用いて、表 - 1 の実際の直径階別本数にワイブル分布を適用させてみる。ワイブル分布は確率密度関数なので、全体の本数を乗じて各直径階の本数が算出できる。この場合、直径級の幅も乗ずるようにしなければならない。

まず、表 - 1 に示すように、各直径階から a の値を引いて、 x の値を求める。

$$f(x) = (c/b)(x/b)^{c-1} e^{-\{(x/b)^c\}}$$

の式に得られたパラメーターを代入して、 x の値 (1 ~ 17) に応じる直径階別本数を求めてみると次の通りである。

4cmの直径階, $x=1$

$$720(\text{本数}) \times 2(\text{直径階の幅}) \times (2.5/8.7122) \times (1/8.7122)^{1.5} \times e^{-\{(1/8.7122)^{2.5}\}} = 16$$

6cmの直径階, $x=3$

$$720(\text{本数}) \times 2(\text{直径階の幅}) \times (2.5/8.7122) \times (3/8.7122)^{1.5} \times e^{-\{(3/8.7122)^{2.5}\}} = 78$$

8cmの直径階, $x=5$

$$720(\text{本数}) \times 2(\text{直径階の幅}) \times (2.5/8.7122) \times (5/8.7122)^{1.5} \times e^{-\{(5/8.7122)^{2.5}\}} = 140$$

以下同様にして計算することができる。結果を表 - 1 に示した。この場合、四捨五入の関係で、理論値が現実本数と一致しないことがあるが、上位の最後の直径階で修正しておくといよい。 e の記号は自然対数の底をあらわし、最近のポケット型電卓でも、関数型であればごく簡単に求めることが可能である。

なお、ワイブル分布は次式のように変形できる。

$$F(x) = \int_0^x (c/b)(x/b)^{c-1} e^{-\{(x/b)^c\}} dx = 1 - e^{-\{(x/b)^c\}}$$

従って、第 1 の直径階の本数は

$$n_1 = N \cdot \left\{ e^{-\{(0/b)^c\}} - e^{-\{(2/b)^c\}} \right\}$$

第 2 の直径階の本数は

$$n_2 = N \cdot \left\{ e^{-\{(2/b)^c\}} - e^{-\{(4/b)^c\}} \right\}$$

として順次求めてもよい。なお、前の算出式における x の値は、今回の場合の 0 ~ 2, 2 ~ 4 の中央値に該当するものである。

ワイブル分布の利用例

以上述べたように、ワイブル分布は平均直径と変動係数の値が求めれば、直径階別本数を理論的に計算できる。ワイブル分布は図 - 1 に示したように多種類の分布に適合するので、現実林分へのあてはまりもよいことが多くの樹種で確認されている。その利用方法として、直径階別本数を表示したトドマツ収穫予想表の作成（北林試報 19 号，1981）パラメーター c の値による分布の形：これは c の値により、正規分布型か、左右に偏った分布型かを判断して間伐時の参考にする。林分構造の予測：一般に立木本数と平均直径、平均直径と変動係数の間には何らかの関係が成立することが多い。これらの関係が得られれば、林分単位に直径階別本数を予測できる。

従来は、材積や平均直径というように、林分全体の値、あるいは平均値的な表現が多かった。しかし、林分は個々の立木で構成されているので、できるだけそのばらつきを表示すべきである。直径階別本数は林業を営んでいく上できわめて有益な情報となろう。（道北支場）

表 - 2 変動係数 (CV_x) からワイブル分布のパラメーターを求める表

パラメーター C	G	変動係数 C V x	パラメーター C	G	変動係数 C V x	パラメーター C	G	変動係数 C V x
.25	24.00000	8.30662	1.75	.89062	.58973	3.25	.89633	.33827
.30	9.26053	5.40769	1.80	.88929	.57486	3.30	.89702	.33363
.35	5.02915	3.97207	1.85	.88821	.56080	3.35	.89770	.32916
.40	3.32335	3.14086	1.90	.88736	.54747	3.40	.89838	.32482
.45	2.47859	2.60636	1.95	.88671	.53477	3.45	.89907	.32056
.50	2.00000	2.23607	2.00	.88623	.52271	3.50	.89975	.31645
.55	1.70243	1.96501	2.05	.88589	.51125	3.55	.90043	.31244
.60	1.50458	1.75806	2.10	.88569	.50030	3.60	.90111	.30852
.65	1.36627	1.59476	2.15	.88561	.48982	3.65	.90178	.30473
.70	1.26582	1.46243	2.20	.88562	.47984	3.70	.90245	.30101
.75	1.19064	1.35286	2.25	.88573	.47026	3.75	.90312	.29739
.80	1.13300	1.26052	2.30	.88591	.46110	3.80	.90379	.29383
.85	1.08796	1.18149	2.35	.88617	.45227	3.85	.90445	.29039
.90	1.05218	1.11304	2.40	.88648	.44385	3.90	.90510	.28706
.95	1.02341	1.05304	2.45	.88685	.43572	3.95	.90576	.28374
1.00	1.00000	1.00000	2.50	.88726	.42791	4.00	.90640	.28056
1.05	.98079	.95271	2.55	.88772	.42038	4.05	.90704	.27742
1.10	.96491	.91022	2.60	.88821	.41315	4.10	.90768	.27434
1.15	.95170	.87182	2.65	.88873	.40616	4.15	.90831	.27136
1.20	.94066	.83690	2.70	.88928	.39943	4.20	.90894	.26840
1.25	.93138	.80501	2.75	.88986	.39290	4.25	.90956	.26555
1.30	.92358	.77571	2.80	.89045	.38662	4.30	.91017	.26277
1.35	.91699	.74872	2.85	.89106	.38055	4.35	.91078	.26001
1.40	.91142	.72376	2.90	.89169	.37466	4.40	.91138	.25734
1.45	.90672	.70056	2.95	.89233	.36896	4.45	.91198	.25472
1.50	.90275	.67896	3.00	.89298	.36345	4.50	.91257	.25215
1.55	.89939	.65881	3.05	.89364	.35810	4.55	.91316	.24990
1.60	.89657	.63991	3.10	.89430	.35293	4.60	.91374	.24712
1.65	.89421	.62217	3.15	.89498	.34787	4.65	.91431	.24473
1.70	.89224	.60550	3.20	.89565	.34301	4.70	.91488	.24236